Una Práctica Teoría de la Optimización Lineal

Autor: Marcos Singer

Escuela de Administración
Pontificia Universidad Católica de Chile

noviembre de 2010

Contenidos

Prefacio iv
Capítulo 1 Optimización Gráfica 1
1.1 Planificación Estratégica 1
1.2 Control de Gestión 10
1.3 Transporte Público 15
1.4 Gestión de Procesos 18
1.5 Posicionamiento de un Banco 24
Apéndice: Programación No-lineal 28
Ejercicios Resueltos 34
Ejercicios Propuestos 51
Capítulo 2 Modelos Indexados 57
2.1 Transporte y Distribución 57
2.2 Modelos de Transferencia 69
2.3 Planificación de la Producción 77
2.4 Gestión de Abastecimiento 85
Ejercicios Resueltos 89
Ejercicios Propuestos 94
Capítulo 3 Modelos Dinámicos 98
3.1 Planificación Dinámica de la Producción 98
3.2 Combate contra el Narcotráfico 105
3.3 Planificación Logística 111
3.4 Redes Dinámicas de Transferencia 124
3.5 Programación Lineal Estocástica 129
3.6 Modelo de Negocio 135
Ejercicios Resueltos 148
Ejercicios Propuestos 156
Capítulo 4 Geometría Vectorial para la Optimización 159
4.1 Elementos de la Geometría Vectorial 159
4.2 Interpretación de los Elementos Geométricos 166
4.3 Análisis Envolvente de Datos 175
Ejercicios Resueltos 195
Ejercicios Propuestos 202

Capítulo 5 Propiedades del Programa Lineal 204
5.1 Geometría del Poliedro Factible 204
5.2 Características Inductivas del Poliedro Factible 207
5.3 Los Precios Sombra 211
5.4 El Programa Dual 216
Apéndice: el Razonamiento Inductivo 227
Ejercicios Resueltos 230
Ejercicios Propuestos 238
Capítulo 6 El Método Simplex 242
6.1 Descripción General del Método 242
6.2 Aspectos Algebraicos del Método 244
6.3 Representación Vectorial del Método 258
6.4 Análisis Geométrico a Partir del Tableau 260
6.5 Interpretación Económica del Método Simplex 275
Ejercicios Resueltos 287
Ejercicios Propuestos 306
Capítulo 7 Conclusiones 312
7.1 Elección Racional y Optimización 312
7.2 Lecciones Generales de la Optimización 313
7.3 Recomendaciones de Uso 317
Apéndice I Nociones de Geometría Analítica 321
Los Elementos 321
El Área Factible 322
Análisis de Sensibilidad 324
Apéndice II Uso del Solver de Microsoft Excel 326
Definición del Modelo a Optimizar 326
Problemas y Soluciones 330
Recomendaciones y Comentarios 332
Referencias 333
Índice 339

Prefacio

Las Ciencias Cuantitativas de la Administración

Albert Einstein (1879-1955) escribió: "D'ios no juega a los dados sino más bien ha dictado leyes según las cuales la realidad se desarrolla. El afán de la ciencia es descubrir estos pensamientos de D'ios". Lo más probable es que el desempeño de las empresas y las organizaciones tampoco sea fruto de un juego de dados, sino de un sinnúmero de decisiones. Cuanto mayor sea la comprensión de las leyes que rigen su realidad, más acertadas serán sus decisiones.

La ciencia intenta descubrir las leyes de la realidad conjeturando modelos para luego, a la luz de la evidencia, validarlos o descartarlos. Un *modelo* es una descripción simplificada de un fenómeno, donde la relación entre sus principales elementos (por ejemplo, su causalidad) está descrita formalmente. Una *teoría* o ciencia es una colección de modelos coherentes entre sí.

Según Galileo Galilei (1564-1642), las leyes de la realidad se revelan en el lenguaje de las matemáticas. La traducción de la trayectoria de los planetas en el cielo nocturno fue siempre problemática para la astronomía; inexplicablemente, Marte, Júpiter y Saturno parecían detenerse en su trayectoria y comenzaban a moverse en sentido contrario. Para descifrar el acertijo, Nicolás Copérnico (1473-1543) cambió el origen del sistema planetario, desde la Tierra (geocéntrico) al sol (heliocéntrico). Al suponer que los planetas, incluida la Tierra, describen órbitas circulares alrededor del sol[1], pudo explicar la trayectoria de los planetas y otras observaciones astronómicas.

Las ciencias cuantitativas de la administración (*management science*, en inglés[2]) es la teoría que utiliza modelos cuantitativos para apoyar la toma de decisiones relacionadas con la dirección de las organizaciones. Surgió durante la Segunda Guerra Mundial como resultado del rol que tuvo el mundo científico en la conducción del Ejército Aliado. Mientras Adolf Hitler se hacía asesorar por adivinos y astrólogos, Winston Churchill y Franklin D. Roosevelt se rodearon de los mejores científicos de la época. El primer encargo del que se tiene registro es la solicitud que Churchill le hizo al físico Patrick Blackett – quien ganaría el Premio Nobel de Física en 1948 – de evaluar la conveniencia de entregar apoyo aéreo a la campaña rusa en Alemania (Blackett, 1948). El beneficio que este y otros estudios le depararon al Ejército Aliado le acarreó a las ciencias cuantitativas de la administración la credibilidad necesaria para influir en la toma de decisiones. Al terminar la Guerra, muchos de los asesores científicos se abocaron al estudio teórico de los modelos matemáticos y a su aplicación a problemas enfrentados por las empresas e instituciones (Dantzig, 2002).

El rol de los modelos cuantitativos en la toma de decisiones puede entenderse mediante la Ilustración 0.1. El modelo sirve de "archivo" que le da significado a los datos que describen los fenómenos (Friedman, 1953). De los modelos las personas extraen conceptos, esto es ideas comprensibles, que los apoyan en la toma de decisiones (Pidd, 1999).

---

[1] Observaciones más precisas ajustaron las órbitas a elipses.
[2] En inglés *management science* se refiere exclusivamente a las ciencias cuantitativas de la administración.

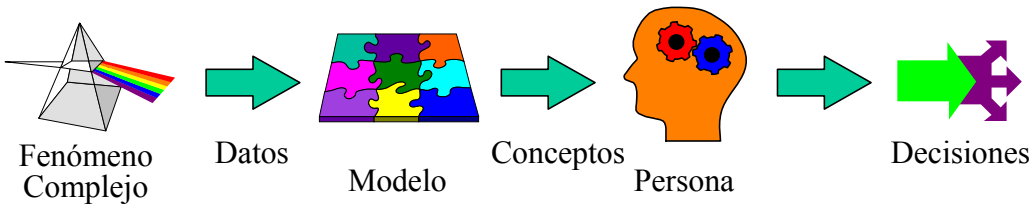


Ilustración 0.1: Datos, modelos y decisiones

La administración de empresas también se revela en el lenguaje de las matemáticas. Consideremos el problema de una tienda que debe determinar el nivel de inventario óptimo, lo que equivale a definir el tamaño Q de la orden de productos solicitada a sus proveedores. Tal como lo muestra la Ilustración 0.2, la descripción del problema pasa por sucesivos niveles de abstracción. Un primer nivel es la descripción verbal. La descripción debe ser precisa y concisa, es decir, debe ser realista y debe diferenciar cuáles elementos son esenciales y cuáles no. Un siguiente nivel de abstracción es la representación gráfica, que muestra el comportamiento del inventario mediante un diagrama. Finalmente, el nivel algebraico traduce la descripción gráfica a expresiones matemáticas, susceptibles de ser manipuladas por el álgebra, el cálculo o cualquier otro instrumento lógico-matemático.

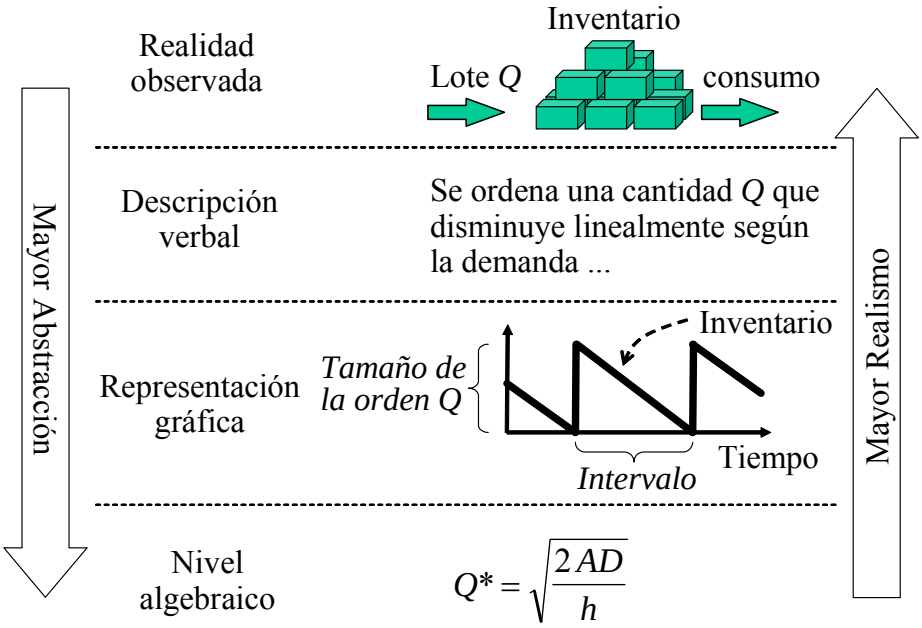


Ilustración 0.2: Grados de abstracción de la planificación de inventarios

Mientras más abstracta es la descripción mayor es su capacidad de deducir conclusiones. En la Ilustración 0.2, el álgebra permite utilizar la condición de primer orden –derivar e igualar a cero la función de costo– para deducir la cantidad óptima Q^* de inventario a ordenar. Finalmente, este nuevo conocimiento es interpretado en niveles de menor abstracción y de mayor realismo (Greenberg, 1993).

<u>La Programación Lineal</u>

Una manera de razonar por abstracción-deducción-interpretación es identificando los *parámetros* y *variables de decisión* del problema. Los parámetros son los datos que se obtienen de la realidad, cuyos valores son exógenos (de origen externo) al modelo. Las

variables cuantifican las decisiones a ser tomadas; son endógenas (de origen interno), es decir, son generadas por el modelo. A continuación se construye la función objetivo y las restricciones. La *función objetivo* es una expresión algebraica de parámetros y variables que debe ser optimizada (maximizada o minimizada). Las *restricciones* son expresiones algebraicas de parámetros y variables que condicionan el valor que pueden tomar las variables de decisión. En resumen, la función objetivo expresa lo que se quiere hacer; las restricciones expresan lo que se puede hacer.

Los modelos de optimización de una función objetivo sujeta a un conjunto de restricciones se denominan modelos de *programación matemática*. Cuando las expresiones algebraicas son lineales, es decir, las variables de decisión están en potencia de cero o de uno, el modelo se denomina de *programación lineal*. El término "programación" proviene de la primera aplicación que desarrolló George Dantzig (1914-2005), el fundador de la programación matemática. A fines de la Segunda Guerra Mundial, su tarea consistía en proponer una asignación o "programa" del personal de la fuerza aérea norteamericana a diferentes actividades, conociendo el beneficio de cada posible asignación.

El primer gran aporte de Dantzig fue describir y axiomatizar este problema de asignación, y muchos otros problemas, mediante una función objetivo y restricciones lineales. Hasta entonces, sólo tenía sentido plantear un problema de optimización si también se describía una metodología *ad-hoc* de resolución. Al concebir una formulación multipropósito, la descripción matemática del problema se independizó de la forma de resolverlo[3]. Un segundo gran aporte de Dantzig fue plantear un algoritmo de resolución de los modelos lineales de optimización, que denominó el método *Simplex*. El "simplex" es una figura geométrica en la que está basado el método.

El desarrollo de programación lineal significó un progreso sin precedentes en la administración de empresas. Un ejemplo en el que trabajó Dantzig consistía en asignar 70 personas a 70 actividades. No obstante es un problema relativamente pequeño en la práctica, el número de posibles soluciones es 70! (factorial), mayor que 10^{100}. Si una computadora pudiera calcular mil millones de asignaciones por segundo, no podría resolver este problema aunque hubiera empezado a trabajar cuando se creó el universo. El método Simplex simplifica la enorme complejidad computacional, resolviendo esta asignación de 70×70 en pocas iteraciones que un microcomputador calcula casi instantáneamente. El trabajo posterior de Dantzig inauguró la optimización a gran escala, la programación lineal estocástica y otras áreas de investigación que tuvieron un profundo impacto en varias disciplinas científicas (Orden, 1993).

En un principio muchos dudaron de que la modelación lineal fuera útil. "Pero todos sabemos que el mundo es no-lineal" expresó sarcásticamente el famoso economista Harold Hotelling durante la charla en que el joven Dantzig estaba presentando por primera vez su trabajo. Frente a esta descalificación, John von Neumann[4] replicó públicamente que ésta era

---

[3] El matemático ruso Leonid Kantorovich (1912-1986) desarrolló de manera independiente una axiomatización similar, la que aplicó al problema de la asignación óptima de recursos. Por dicho trabajo recibió el Premio Nobel de Economía en 1975.

[4] John von Neumann (1903-1957) posiblemente es el matemático más importante del Siglo XX. Es uno de los fundadores de la Teoría de Juegos, de las Ciencias de la Computación y de la Programación Matemática (Capítulo 5).

una charla sobre programación lineal, y si alguien no estaba de acuerdo con los supuestos de linealidad, no tenía que asistir a la charla. Los años demostraron que la modelación lineal es muy efectiva para muchos problemas prácticos.

Estructura del Texto

El contenido de este texto se organiza en siete capítulos, cuya temática es la siguiente.

- Capítulo 1: describe varios problemas de administración simplificados a dos variables de decisión. Para resolverlos, primero se expresan algebraicamente para luego dibujarlos mediante la geometría analítica.
- Capítulo 2: amplía la modelación a problemas con múltiples variables. Presenta casos realistas de transporte y distribución, producción y abastecimiento, resolviéndolos mediante planilla de cálculo.
- Capítulo 3: modela problemas dinámicos de optimización, es decir, que toman decisiones a lo largo de varios períodos. Presenta nuevos casos de estudio, incluyendo problemas de política pública, de logística y de modelo de negocio.
- Capítulo 4: extiende el razonamiento geométrico bidimensional a problemas con múltiples variables. Para ello utiliza la geometría vectorial, que representa algebraicamente puntos, rectas, planos y otros entes multidimensionales.
- Capítulo 5: interpreta algunas de las propiedades de los programas lineales bidimensionales a los multidimensionales. Presenta el programa lineal dual, que se define a partir del programa lineal original, llamado primal. Interpreta el par primal-dual de programas lineales como puntos de vista complementarios del mismo problema de decisión.
- Capítulo 6: describe el método Simplex, el cual recorre la superficie del espacio factible multidimensional definido por las restricciones, hasta encontrar la solución óptima. Desarrolla la interpretación geométrica y la interpretación económica del método.
- Capítulo 7: resume y relaciona los principales conceptos presentados en el texto. Muestra la manera en que se pueden aplicar estos conceptos tanto en contextos cuantitativos como cualitativos.

La secuencia de contenidos son un todo coherente que puede dividirse en dos partes. La primera parte, que incluye los capítulos 1, 2 y 3, tiene una orientación práctica; muestra para qué sirve la programación lineal a través de aplicaciones realistas en la administración de empresas y otras organizaciones. Esta parte puede servir de apoyo a cursos de administración, estrategia, operaciones, producción y logística.

Los capítulos 4, 5 y 6 son más bien teóricos; muestran cómo funciona la programación lineal y cómo puede interpretarse. Pueden servir apoyo a cursos tales como optimización, álgebra lineal y geometría vectorial.

Capítulo 1 Optimización Gráfica

El objetivo de este capítulo es mostrar ejemplos del razonamiento por abstracción-deducción-interpretación para problemas de administración sencillos, generalmente de dos variables.

Al igual que en la Ilustración 0.2, la primera etapa de abstracción corresponde a la descripción verbal del problema. Dicha descripción se reduce al álgebra (que en árabe significa "reducción"), que relaciona números y símbolos en ecuaciones y fórmulas.

A continuación estudiamos el problema de decisión mediante la *geometría analítica*, que traduce las fórmulas algebraicas a figuras geométricas. La traducción se realiza utilizando un sistema de referencia de *ejes de coordenadas* perpendiculares entre sí, denominados "cartesianos" en honor a René Descartes (1596-1650).

Al ser los problemas de dos variables, la función objetivo y las restricciones pueden representarse como figuras planas. Con ello se pueden resolver utilizando la *geometría euclidiana* plana, es decir, la que dibuja puntos, rectas y otros elementos en un plano.

1.1 Planificación Estratégica

Winston Churchill decía que "los planes tienen poca importancia, pero planificar es esencial". En otras palabras, no es necesariamente el resultado de la planificación lo que importa, sino la reflexión sistemática que prepara para reaccionar ante las contingencias.

La planificación estratégica elige la estrategia competitiva óptima para la empresa. Según Stoelhorst & van Raaij (2004), puede entenderse en el contexto de diferentes teorías. Una de las más relevantes es la teoría neoclásica de la firma, que se basa en los siguientes supuestos.

- No se puede influir en los precios porque los mercados son en general competitivos.
- No hay diferenciación ("comoditización") porque los métodos de producción y los procesos de servicio se pueden imitar.
- Los recursos son divisibles y móviles; fábricas y centros de atención (*call centers*) pueden localizarse en cualquier parte del mundo.
- La información es pública y fácil de recopilar.
- Las transacciones son expeditas.

Hace algunas décadas estos supuestos parecían exageradamente simplistas. Actualmente, la globalización, la liberalización de los mercados y de los flujos de capital, las nuevas tecnologías de producción y de telecomunicaciones y la masificación de Internet están llevando a varias industrias al escenario de la teoría neoclásica de la firma. En él, las firmas compiten en los mercados de productos y servicios, en el mercado laboral y en el mercado de capitales.

Para las empresas que enfrentan esta fuerte competencia, la estrategia más eficaz es maximizar la eficiencia de la firma, es decir, generar el máximo valor económico utilizando

la menor cantidad de recursos. Esto significa ofrecer la mejor combinación (*mix* en inglés) de productos y servicios, minimizando los costos de producción y el volumen de inversión.

Una de las actividades económicas que más se ajustan a esta descripción es la industria frutícola. Uva de mesa, manzanas y naranjas producidas en Chile, España o EE.UU. compiten de igual a igual por llegar a los consumidores en China, India y Europa. En 2005, Chile era el principal exportador mundial de fruta del hemisferio sur, y desde entonces ha crecido sostenidamente en volúmenes y calidad. Sin embargo, existen amenazas a esta posición competitiva, como por ejemplo el fortalecimiento de la moneda local respecto del dólar. Chile también muestra una debilidad en su productividad total de factores, es decir, en su capacidad de producir más fruta con la menor cantidad de trabajadores, tierra cultivada, bienes de capital e insumos agrícolas (Guzmán & Singer, 2009). Esta productividad depende, entre otras cosas, de las decisiones de producción de las empresas ilustradas en el siguiente ejemplo.

1.1.1 Caso de Empresa Frutícola

Supongamos que una central frutícola (*packing* en inglés) debe determinar la cantidad de peras y de uvas a procesar con el objeto de maximizar sus ingresos[5] (Lowe & Preckel, 2004). Si bien su decisión de producción cuenta con estos dos *grados de libertad*, debe cumplir con un conjunto de restricciones. La disponibilidad máxima de uvas es 50 toneladas [t] durante la temporada de cosecha. La capacidad de la planta es 120 horas [h]. Cada tonelada de peras requiere de 1 [h] de planta mientras que cada tonelada de uvas requiere de 2 [h]. Dada la demanda que enfrenta, puede vender un máximo de 60 [t] de peras. Las peras se venden a $20 mil pesos por tonelada [M$/t] y las uvas se venden a 30 [M$/t].

Para traducir al lenguaje de las matemáticas este problema de elección de la estrategia competitiva, primero identificamos las variables y parámetros, y luego formulamos la función objetivo y restricciones. Las variables son: los ingresos[6] z (medidos en miles de pesos [M$]), la cantidad de peras p a procesar (expresadas en [t]) y la cantidad de uvas u a procesar (expresadas en [t])[7]. Los parámetros son, entre otros, el precio de las peras $P_p = 20$ [M$/t] y el precio de las uvas $P_u = 30$ [M$/t][8]. Con las variables de decisión y los parámetros definimos la función objetivo como la maximización de z [M$] = P_p [M$/t] p [t] + P_u [M$/t] u [t]. El conjunto de decisiones factibles está definido por las restricciones de disponibilidad de uvas, de capacidad producción y de demanda de peras, además de las restricciones de no-negatividad de peras y uvas. Estas limitaciones corresponden a la *cadena de valor* de Porter (1985) de la Ilustración 1.1, según la cual la firma agrega valor desde proveedores a clientes, restringida por la capacidad de cada una de sus *unidades funcionales* o *de línea*: Adquisiciones, Operaciones y Ventas.

---

[5] Supondremos que los costos son escencialmente fijos, así es que no intervienen en la decisión.
[6] En general la variable a maximizar o minimizar se llamará z.
[7] Escribiremos las variables con minúscula cursiva, y a veces con su unidad de medida.
[8] Escribiremos los parámetros con letra mayúscula no-cursiva, y a veces con su unidad de medida.

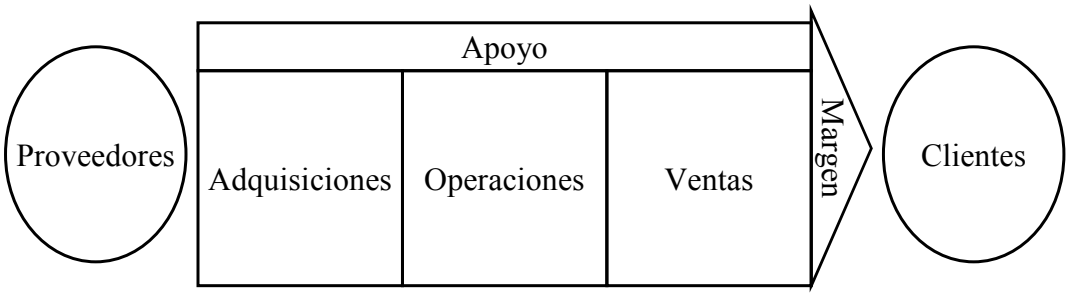


Ilustración 1.1: Cadena del valor (de Porter) de la central frutícola

Lo anterior se resume en la siguiente maximización sujeta a un sistema de inecuaciones.

Maximizar z [M$] = 20 [M$/t] p [t] + 30 [M$/t] u [t]
sujeto a:

p [t] ≤ 60 [t]	Demanda de peras;
1 [h/t] p [t] + 2 [h/t] u [t] ≤ 120 [h]	Capacidad de planta;
u [t] ≤ 50 [t]	Disponibilidad de uvas;
p [t] ≥ 0 [t]	No-negatividad peras;
u [t] ≥ 0 [t]	No-negatividad uvas.

Ejercicio 1: Restricciones de no-negatividad

Cualquier valor negativo de p o de u reduce la función objetivo que se está tratando de maximizar. Por ejemplo, si p = -1 se pierden 30 [M$] de ingresos. Entonces, ¿es necesario hacer explícitas las restricciones de no-negatividad o éstas se cumplirán automáticamente?

Respuesta: si u = -1 se "liberan" 2 [h] del recurso planta, lo que permite producir 2 [t] más de peras y con ello ganar 2 · 20 [M$] = 40 [M$]. Naturalmente, no existen peras negativas, por lo que, en principio, debería impedirse que u tome un valor menor que cero. Sin embargo, la producción de peras está restringida por p ≤ 60 [t], por lo que hacer u negativa no produce beneficios. Por lo tanto, en este caso las restricciones de no-negatividad se cumplirán automáticamente.

El uso de la capacidad de la planta por las uvas procesadas corresponde a su *costo unitario*. En este caso es 2 [h/t]: producir 1 [t] de uvas consume 2 [h] de planta. El inverso del costo unitario de la uva es la *productividad* de la planta en términos de uva: $(2\ [h/t])^{-1}$ = (1/2 [t/h]). La productividad es la cantidad de toneladas de uvas que se pueden producir en una hora. Por lo tanto, aumentar la productividad de un recurso respecto de un producto es equivalente a disminuir su costo unitario en la magnitud inversa.

Una manera alternativa de expresar la productividad de un recurso es definir su capacidad máxima de producción, si éste es dedicado de manera exclusiva. En el caso de la capacidad de planta, podría decirse que las 120 [h] permiten procesar 120 [t] de peras, 60 [t] de uvas, o cualquier *combinación lineal convexa*[9](combinación de peras y uvas que ocupan toda la capacidad disponible).

[9] En ocasiones omitiremos "lineal convexa", cuando se subentienda del contexto.

1.1.2 Resolución Gráfica del Problema

La Ilustración 1.2 muestra la representación del problema mediante los ejes de coordenadas p y u. Representamos la decisión p = 10 [t] y u = 20 [t] mediante el *punto* (10, 20). La *ecuación* de la forma A p + B u + C = 0 es una recta cuya pendiente -A/B indica la relación de transacción (*trade-off* en inglés) entre las variables p y u. La ecuación de utilización máxima de la planta 1 p [t] + 2 u [t] = 120 tiene una pendiente -1/2, que implica que por cada p adicional, se debe renunciar a 1/2 de u. Las restricciones de desigualdad son inecuaciones algebraicas o *semiplanos* (mitades del plano) geométricos. La *holgura* de un cierto punto respecto de una restricción se obtiene de la diferencia entre el término libre de la desigualdad del tipo "≤" y el valor del punto en la expresión lineal. Por ejemplo, el par ordenado (10, 20) tiene holgura 120 – (1 · 10 + 2 · 20) = 70 respecto de la capacidad de la planta. Cuando la desigualdad representa la disponibilidad de un recurso, en este caso la planta frutícola, la holgura mide la ociosidad del recurso; producir p = 10 [t] y u = 20 [t] genera una ociosidad de 70 [h] de planta. Geométricamente, la holgura está asociada a la distancia del punto a la recta de la desigualdad. El *área factible* corresponde a la intersección de los semiplanos definidos por cada una de las cinco restricciones del problema. El Apéndice I describe en detalle la representación geométrica de los diferentes elementos.

Como se observa, varios conceptos tienen una interpretación en la administración de empresas, en el álgebra y en la geometría. Por ejemplo, la restricción de igualdad de la administración corresponde a la ecuación algebraica y a la recta geométrica. En la Sección 7.1 al final de este texto presentamos un resumen de estos y otros conceptos.

La *función objetivo* es una familia de rectas paralelas de la forma z = 20 p + 30 u, todas con la misma pendiente: -2/3. Su posición está definida por z; a mayor z, más lejos está la recta del origen. Para graficar la función objetivo, primero le damos un valor cualquiera al término libre z. Con ello determinamos una *isocuanta* o *curva de indiferencia*, es decir, un conjunto de puntos cuya valoración para el individuo es idéntica. Para maximizar z, desplazamos la isocuanta en forma paralela en la dirección de incremento z. El punto óptimo es un punto que satisface todas las restricciones y que pertenece a la isocuanta con mayor z. La Ilustración 1.2 muestra dos isocuantas: la de z = 1.200 [M$] y la de z = 2.100 [M$]. El punto óptimo es: p = 60 [t] y u = 30 [t], con z = 60 · 20 [M$] + 30 · 30 [M$] = $2.100 [M$].

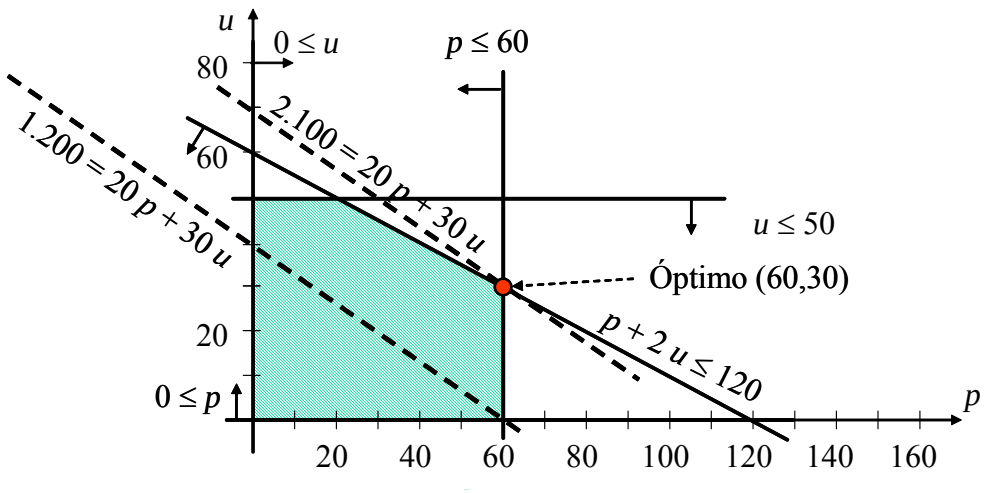


Ilustración 1.2: Resolución gráfica del problema de la central frutícola

Un *punto interior* del área factible no pertenece a la frontera de ninguna restricción, es decir, tiene todas sus holguras estrictamente positivas. Al no estar restringido, a partir de él existe libertad para moverse en cualquier dirección, en particular en la que mejora la función objetivo. Si siempre existe un vecino mejor, entonces un punto interior no puede ser óptimo, de lo cual concluimos que, en problemas lineales, siempre el óptimo está en la frontera de lo factible.

Una *restricción activa* en un punto es satisfecha en igualdad, es decir, su holgura es cero. En la Ilustración 1.2, las restricciones activas en el punto óptimo son la de capacidad de planta y la de venta máxima de peras. Se llama "activa" porque está restringiendo activamente a la función objetivo. Las restricciones no-activas participan de manera pasiva en la optimización, si bien pueden activarse si cambia la función objetivo. Una *restricción redundante* es aquella que no modifica el área factible. Otras restricciones aseguran su cumplimiento, por lo que si éstas se relajan o desaparecen, la restricción que es redundante puede dejar de serlo. Por tal motivo, se puede eliminar una restricción redundante sólo si existe certeza de que las otras restricciones del problema no cambiarán.

1.1.3 Análisis de Sensibilidad

El *análisis de sensibilidad* evalúa cómo afectan a la solución óptima cambios en las condiciones del problema. A continuación veremos el efecto de cambio en los precios y de disponibilidad de recursos. Más adelante estudiaremos cambios en la productividad y en otros parámetros del problema.

<u>Sensibilidad al Precio</u>

Una de las principales fuentes de incertidumbre en la industria frutícola es el precio internacional de la fruta. La Ilustración 1.3 muestra el comportamiento de precios de algunas de las frutas más significativas para las exportaciones chilenas.

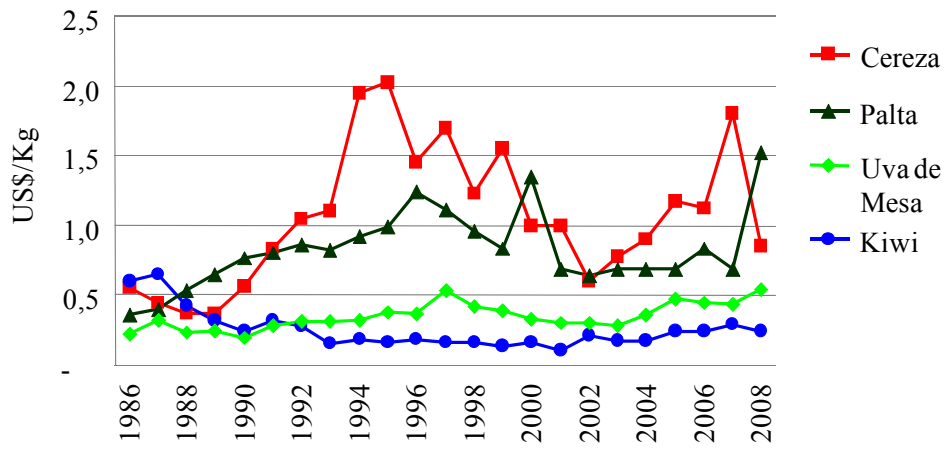


Ilustración 1.3: Precios de frutas chilenas

Para evaluar el efecto de los precios en el plan de producción de la central frutícola, supongamos que el precio de las peras no cambia. Mientras el precio de las uvas esté entre 0 [M$] y 40 [M$] la decisión óptima sigue siendo p = 60 [t] y u = 30 [t]. El precio de 40 [M$] es un *parámetro umbral* a partir del cual la decisión óptima cambia a p = 20 [t] y u = 50 [t]. Por lo tanto, aunque el resultado z es incierto, en un amplio rango de precios la decisión óptima no cambia.

Si ambos precios pueden variar, la decisión de producción depende de la pendiente de la función objetivo -(precio pera / precio uva), es decir, de los precios relativos de las peras y uvas. Si la pendiente es -1/2 entonces todo el trazo entre (20, 50) y (60, 30) es óptimo. Si es mayor que -1/2 (es decir, menos negativa) el punto óptimo es (20, 50); si es menor que -1/2 entonces (60, 30) es el punto óptimo. En resumen, la incertidumbre hace que las consecuencias de las decisiones sean muchas veces imprevisibles. En el caso de la central frutícola, el resultado z es una *variable aleatoria*. Aun así es posible utilizar la programación lineal para encontrar solución óptima, especialmente si la variación de los precios está dentro de ciertos rangos.

Disponibilidad de Recursos

Una vez tomada la decisión óptima, ésta puede mejorarse relajando las restricciones activas. Relajar una restricción que representa la disponibilidad limitada de algún recurso equivale a adquirir más de ese recurso, como por ejemplo ampliar la capacidad de la planta o contratar más personal. Invertir en el recurso implica inmovilizar un capital y por ende asumir un cierto riesgo, lo cual es condición para obtener una mayor rentabilidad. El costo de invertir en el recurso es usualmente fácil de estimar: basta con cotizar su precio de mercado. Nosotros nos abocaremos a estimar los beneficios.

El beneficio marginal de relajar una cierta restricción supone mantener fijas las otras restricciones. Relajar una restricción con el signo ≤ significa aumentar el valor del término libre, y ajustarla implica disminuir dicho valor. Relajar una restricción con el signo ≥ implica disminuir el valor de la constante del lado derecho, y ajustarla significa aumentar tal valor. Geométricamente, modificar el lado derecho de una restricción equivale a desplazarla en forma paralela, tal como lo muestra la Ilustración 1.4. Si el desplazamiento aumenta el área factible, el valor de la función objetivo puede mejorar o permanecer

constante. Si el área disminuye, dicho valor puede empeorar o permanecer constante. En el caso de la maximización, relajar una restricción podría producir un beneficio marginal positivo sólo si tal restricción es activa. Si la restricción no es activa, modificarla marginalmente no tiene efecto.

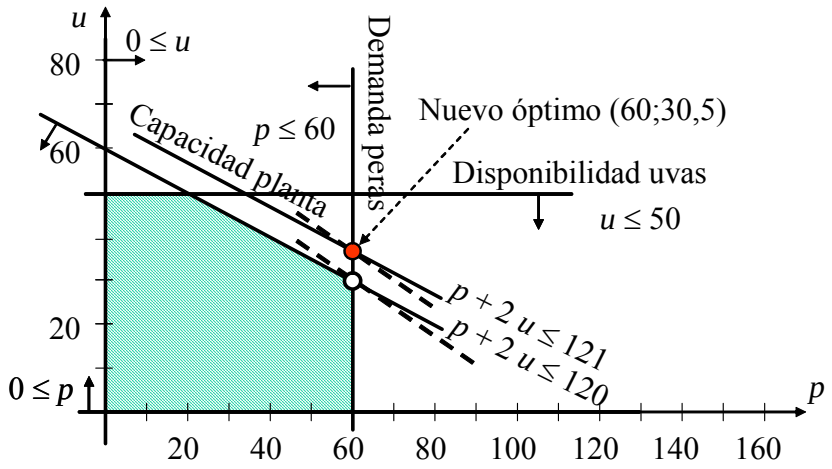


Ilustración 1.4: Interpretación geométrica del cambio marginal

El ingreso de la central frutícola crecerá si se aumenta la capacidad de planta o si se incrementa la venta máxima de peras. Aumentar la capacidad de la planta de 120 a 121 [h] aumenta la utilidad de 2.100 [M$] a 2.115 [M$]. Es decir, el beneficio marginal de la restricción de capacidad es 15 [M$]. La conveniencia de esta acción depende del costo para la empresa de proveerse del recurso adicional, es decir, 1 [h] extra de planta. Si es menor que 15 [M$] entonces es conveniente ampliar la capacidad. La restricción $u \leq 50$ [t] no es activa. En el punto óptimo $u = 30$ [t], con lo cual su holgura es 20 [t]. Relajar la restricción a $u \leq 51$ [t] no tiene efecto en la función objetivo, así es que el cambio marginal es cero.

<u>Eficiencia versus Flexibilidad</u>

Otra línea de acción para la central frutícola es deshacerse de recursos que están subutilizados. La capacidad de proveerse 50 [t] de uva es resultado de, por ejemplo, una inversión en viñedos. Dada su ociosidad, la empresa podría vender las plantaciones que no necesita, lo que significa contraer la restricción $u \leq 50$ [t] a $u \leq 30$ [t], tal como lo muestra la Ilustración 1.5. Con ello, por el punto (60, 30) pasarían tres restricciones, lo que en términos geométricos lo convierte en un *punto degenerado*. En términos algebraicos, un punto es degenerado cuando activa tres o más restricciones. En términos estratégicos, producir 60 [t] de peras y 30 [t] de uvas se vuelve una *decisión eficiente*, porque no desperdicia capacidad ociosa de ningún recurso.

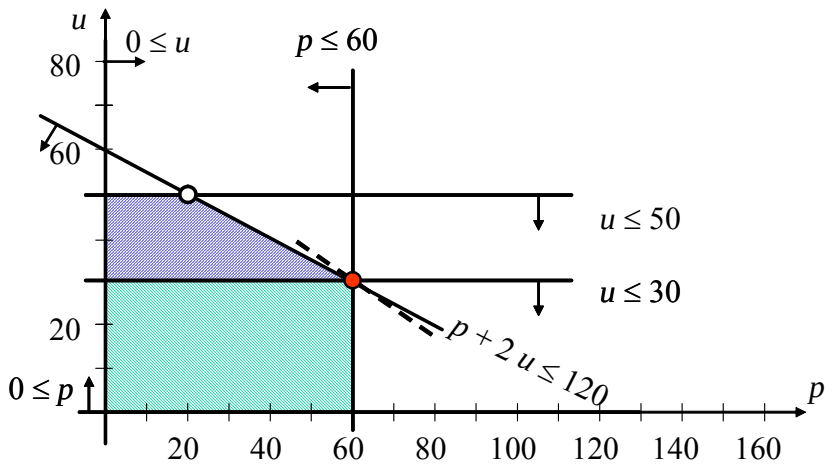


Ilustración 1.5: Desinversión en capacidad de provisión de uvas

La eficiencia no necesariamente es ventajosa. Si los precios de las peras y uvas llegan al umbral calculado en la Sección 1.1.3, por ejemplo a 20 [M$] y a 41 [M$] respectivamente, la empresa ya no podrá tomar la alternativa p = 20 [t] y u = 60 [t], lo cual significará una pérdida de ingreso. La central frutícola también enfrentará dificultades si desea crecer. A diferencia de la Ilustración 1.4, ya no será suficiente ampliar la capacidad de la planta. Deberá simultáneamente relajar la restricción de venta o la de adquisiciones, lo cual agrega complejidad al crecimiento. Concluimos con este ejemplo que, usualmente, la eficiencia se contrapone con la flexibilidad (Adler, Goldoftas & Levine, 1999; Safizadeh, Ritzman & Mallick, 2000).

1.1.4 Optimización con Planilla de Cálculo

Existen varios software de optimización lineal y no-lineal, entre ellos CPLEX, GAMS y LINDO (OR/MS Today, junio 2005). Dada la alta difusión en el medio empresarial, usaremos Solver de Microsoft Excel que viene incluido en la versión estándar de la planilla de cálculo. (Leon, Przasnysky & Seal, 1997).

La Ilustración 1.6 muestra la definición del problema de la central frutícola. Las columnas de la izquierda agrupan parámetros y las de la derecha a las variables de decisión. Las columnas del centro definen las restricciones haciendo referencia a parámetros y variables, tal como lo muestran las flechas obtenidas con la función de "Auditoría de fórmulas" de Microsoft Excel[10]. Por ejemplo, la celda E7 referencia las celdas B7, B8, J3 y J4. Las primeras cuatro filas incluyen parámetros y restricciones de Ventas; las filas 6 a la 9 incluyen parámetros y restricciones de Operaciones; y las filas 11 y 12 incluyen parámetros y restricciones de Adquisiciones.

[10] Para visualizar las flechas de referencia, en Windows XP seleccione en Excel "Herramientas", luego "Auditoría de fórmulas". Con "Rastrear precedentes" se señalan las celdas que influyen en la celda auditada. Con "Rastrear dependientes" se señalan las celdas que son influidas por la celda auditada. Con "Quitar todas las flechas" se borran las flechas de referencia. En Windows Vista, "Fórmulas" hace visibles las funciones de rastreo.

J2 fx =B2*J3+B3*J4

	A	B	D	E	F	G	I	J
1	Parámetros de Ventas		Restricción de Ventas				Variables de Decisión	
2	Precio Peras [M$/Tm]	20	Peras	60	<=	60	Ingresos [M$]	2.100
3	Precio Uvas [M$/Tm]	30					Peras [Tm]	60
4	Demanda Peras [Tm]	60					Uvas [Tm]	30
6	Parámetros de Operaciones		Restricción de Operaciones					
7	Costo Peras [h/Tm]	1	Peras/Uvas	120	<=	120		
8	Costo Uvas [h/Tm]	2						
9	Capacidad [h]	120						
11	Parámetros de Adquisiciones		Restricción de Adquisiciones					
12	Disponib. Uvas [Tm]	50	Uvas	30	<=	50		

Ilustración 1.6: Definición del problema de la central frutícola en Microsoft Excel

La Ilustración 1.7 muestra el editor del Solver de Microsoft Excel, que maximiza la celda objetivo J2[11]. Las variables de decisión son la matriz J3:J4. Las restricciones son E2 ≤ G2, E7 ≤ G7 y E12 ≤ G12. La restricción de no-negatividad se define seleccionando el botón "Opciones…", y luego activando "Asumir no negativos".

Ilustración 1.7: Editor del Solver de Microsoft Excel

En caso de solicitarse, se genera el "Informe de Respuestas" de la Tabla 1.1 que muestra el resultado de la optimización. También indica el valor final de cada una de las restricciones, señalando si ellas son activas ("obligatorias") o no activas ("opcionales") y su holgura ("divergencia").

[11] La notación "$" significa que la referencia no puede modificarse, a menos que el usuario lo haga explícitamente. Por claridad, nosotros omitiremos "$".

Tabla 1.1: Informe de respuestas

Celda objetivo (Máximo)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$J$2	Ingresos [M$]	0	2.100

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$J$3	Peras [Tm]	0	60
$J$4	Uvas [Tm]	0	30

Restricciones

Celda	Nombre	Valor de la celda	fórmula	Estado	Divergencia
$E$2	Peras	60	$E$2<=$G$2	Obligatorio	0
$E$12	Uvas	30	$E$12<=$G$12	Opcional	20
$E$7	Peras/Uvas	120	$E$7<=$G$7	Obligatorio	0

El Apéndice II describe en detalle el uso del Solver de Microsoft Excel (Fylstra *et al.*, 1998). También señala buenas prácticas de uso y errores comunes operación.

Caso Computacional 1: Central Frutícola

Implemente en Microsoft Excel la optimización de la Ilustración 1.6 y obtenga los resultados de la Tabla 1.1. Calcule cuál es el beneficio marginal de la capacidad de planta relajando la restricción correspondiente, como lo muestra la Ilustración 1.4. Verifique que al contraer la restricción de disponibilidad de uvas como en la Ilustración 1.5, se pierde una oportunidad en caso de que suba el precio de la uva.

1.2 Control de Gestión

El *control de gestión* evalúa el nivel de cumplimiento de las metas definidas por la planificación estratégica. Para ello se seleccionan los indicadores clave de desempeño (*key performance indicators* en inglés o KPI) que describen el funcionamiento de la organización. Elegir muy pocos indicadores no permite formarse una opinión suficientemente descriptiva; seleccionar demasiados diluye el esfuerzo de evaluación y aumenta el costo del monitoreo.

Una manera de seleccionar los indicadores clave de desempeño es modelar el proceso de generación de valor como un problema de optimización. Si el modelo está bien planteado, todos los parámetros involucrados son importantes y todos los antecedentes importantes participan en el modelo. Los tres paneles en las columnas A y B de la Ilustración 1.6 identifican cuáles son los indicadores más relevantes para las tres unidades funcionales de la central frutícola. Para la unidad de Operaciones los indicadores clave son los costos unitarios (o productividad) y la disponibilidad de planta. Dado que la restricción que conforman estos tres parámetros es activa en el óptimo, los indicadores son especialmente críticos para la empresa.

En la medida en que la organización crece y su actividad se hace más compleja, más condicionantes afectan su desempeño, y por ende mayor es el número de indicadores de gestión. Ése es el caso de las grandes empresas mineras. Cada una emplea a miles de personas, organizadas en decenas de gerencias y departamentos, los cuales manejan diferentes indicadores según la función que desempeñan. Una de las herramientas de control de gestión que más difusión ha tenido es el Cuadro de Mando Integral o *Balanced Scorecard* (Kaplan & Norton, 1996; Nagar & Rajan, 2005), que ordena los indicadores clave de desempeño según cuatro perspectivas:

- De interés de los accionistas o dueños de la empresa;
- De interés de los clientes;
- Relacionados con los procesos internos;
- Relacionados con la proyección de futuro de la organización.

1.2.1 Caso de Empresa Minera

Supongamos que una empresa de minería de cobre ha diseñado el siguiente *Balanced Scorecard* para cada una de sus divisiones que tiene los siguientes indicadores:

Tabla 1.2: Significado de los indicadores de gestión

Perspectiva	Indicador	Unidad	Descripción
Del accionista	Costo producción	US$/t	Costo en dólares [US$] por tonelada [t] de cobre fino
	Capacidad máxima	Mt	Máxima producción en miles de toneladas
De los clientes	Pureza	% cobre	Porcentaje de cobre en cada tonelada producida
	Rapidez entrega	días	Días que se demora en satisfacer un pedido
Procesos internos	Contaminantes	m^3/Mt	Emisiones de contaminantes a la atmósfera por cada mil toneladas producidas
	Accidentes	n°/Mt	Accidentes personales por cada mil toneladas producidas
De futuro	Capacidad mínima	%	Porcentaje de la capacidad máxima en que se puede reducir la producción sin modificar el costo por tonelada

Clasificamos el indicador de capacidad mínima como de futuro porque, de ser necesario, da flexibilidad a la organización para contraer su producción. Para lograr tal flexibilidad, las empresas muchas veces reducen el personal fijo (*headcount* en inglés) subcontratando parte de sus operaciones a empresas proveedoras.

Suponga que para cada una de las divisiones productivas de la corporación se conocen los indicadores de la Tabla 1.3[12]:

[12] Todos los valores son ilustrativos. En la práctica, la pureza del cobre puede ser 99,99%. La frecuencia aproximada de accidentes es seis por cada 1 millón de horas trabajadas.

Tabla 1.3: Valor de los indicadores de las divisiones

Perspectiva	Indicador	Choqui	Soldado
Del accionista	Costo producción	8	12
	Capacidad máxima	150	80
De los clientes	Pureza	96	90
	Rapidez entrega	10	14
Procesos internos	Contaminantes	5	15
	Accidentes	1	1
De futuro	Capacidad mínima	80	50

La corporación debe determinar las metas de producción de ambas divisiones. Cualquiera sea la meta, debe cumplir las siguientes condiciones.

- Producir en total a lo menos 100 [Mt], dadas las ventas que ya están comprometidas.
- Entregar una pureza promedio mínima de 93%.
- Entregar en un tiempo promedio como máximo de 12 días.
- Generar un máximo de emisiones contaminantes de 1.500 m^3.
- No sufrir más de 220 accidentes[13].
- Ninguna de las divisiones puede reducir su producción por debajo de su capacidad mínima.

Dadas estas condiciones, ¿cuáles son los indicadores más restrictivos para la empresa? Dada la alta volatilidad del precio del cobre que muestra la Ilustración 1.8, responderemos a esa pregunta en dos escenarios: precios altos y precios bajos.

[13] La frecuencia de accidentes es además un predictor de fatalidades. Según la OIT (2005), por cada 1.200 accidentes con más de tres días perdidos ocurre un accidente fatal.

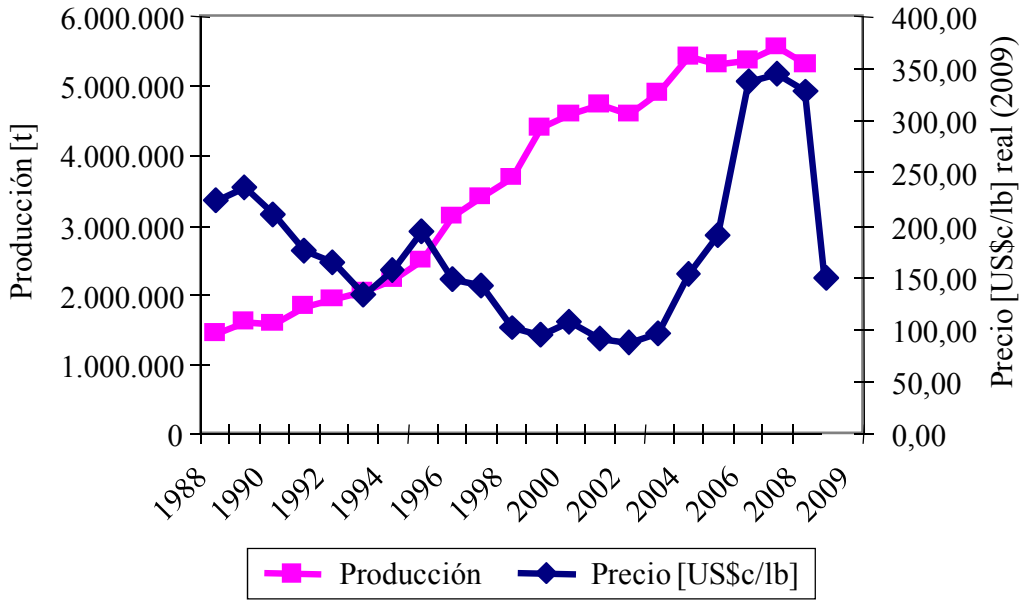


Ilustración 1.8: Precio del cobre y nivel de producción chileno

1.2.2 Escenario de Precios Altos

Supongamos que los precios son altos y que por ello el margen por cada tonelada de cobre vendida, independientemente de la división de la que proviene, es 2 [$/t]. En tal caso, el objetivo de la corporación es maximizar el margen de ventas, lo que se traduce en el siguiente programa lineal de optimización.

Variables de decisión:

z	margen por ventas [US$];
c	cantidad de cobre producida por Choqui [Mt];
s	cantidad de cobre producida por Soldado [Mt].

Maximizar $z = 2.000\ c + 2.000\ s$

sujeto a:	$c + s \geq 100$	Producción mínima de cobre;
	$0{,}96\ c + 0{,}9\ s \geq 0{,}93\ (c + s)$	Grado de pureza;
	$10\ c + 14\ s \leq 12\ (c + s)$	Rapidez entrega;
	$5\ c + 15\ s \leq 1.500$	Contaminación;
	$c + s \leq 220$	Accidentes;
	$c \leq 150;\ s \leq 80$	Capacidad máxima;
	$c \geq 30;\ s \geq 40$	Capacidad mínima.

La restricción de grado de pureza se simplifica a $-c + s \leq 0$. La restricción de rapidez entrega se simplifica de igual manera. La Ilustración 1.9 muestra la representación gráfica del problema, cuya solución óptima es (150, 50), con un margen de 400.000 [$].

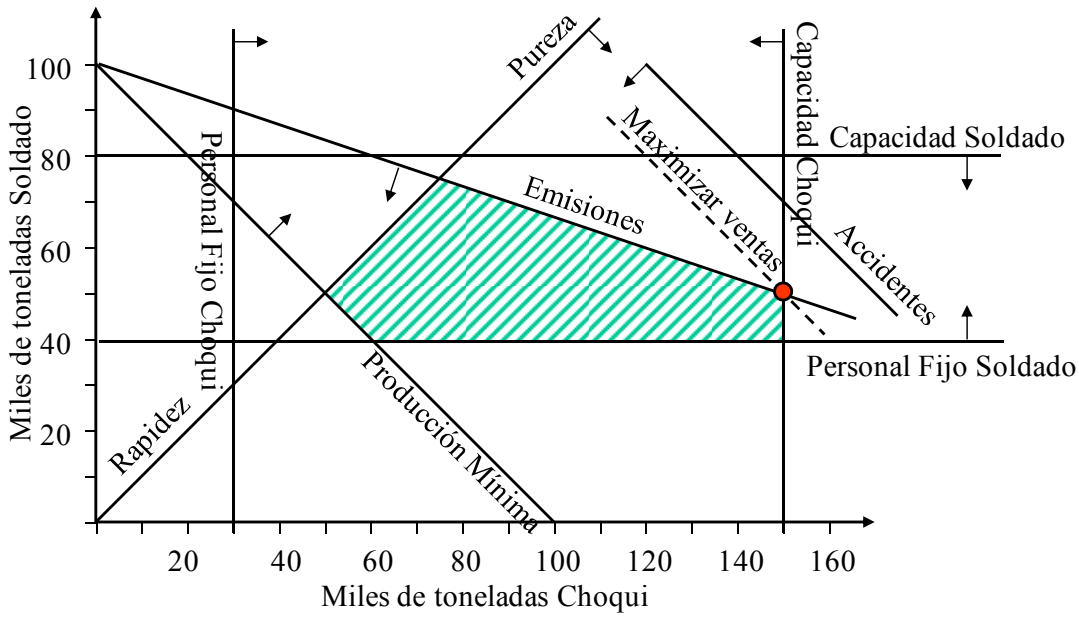


Ilustración 1.9: Determinación de producción ambas divisiones

Con este escenario de precios, podemos evaluar la inversión descrita por el **Ejercicio 2**.

Ejercicio 2: Evaluación de inversión medioambiental

Suponga que se plantea un proyecto que reduce las emisiones contaminantes de la división Choqui de 5 [m^3/Mt] a 3 [m^3/Mt]. ¿Es conveniente este proyecto? ¿Está sobredimensionado? ¿Cuál es el máximo costo que puede tener el proyecto?

Respuesta: la restricción de contaminación pasa de $5\,c + 15\,s \leq 1.500$ a $3\,c + 15\,s \leq 1.500$. El nuevo punto óptimo es (150,70), donde se activan las restricciones de capacidad de Choqui y de accidentes de la corporación. También se activa la nueva restricción de emisiones contaminantes así es que el proyecto no está sobredimensionado, pues no se produce capacidad ociosa. El nuevo margen es de 440.000 [$], por lo que la disposición a pagar por el proyecto es 40.000 [$].

La optimización lineal permite distinguir cuáles indicadores de la Tabla 1.3 son prioritarios. Dadas las restricciones activas en el óptimo, la capacidad máxima de Choqui y las emisiones contaminantes de ambas divisiones son claves para la generación de valor. De realizarse el proyecto medioambiental, que relajaría la restricción correspondiente, también serían importantes los indicadores de accidentes.

Los indicadores de contaminación y de accidentes se relacionan con la *sustentabilidad* de la empresa, esto es, su capacidad de generar valor económico sin comprometer el bienestar de futuras generaciones. Las empresas que no realizan una gestión sustentable se arriesgan a ser enfrentadas por la comunidad, organizaciones sociales o el gobierno, lo cual las expone a perjuicios económicos inmediatos.

1.2.3 Escenario de Precios Bajos

Supongamos que los precios del cobre bajan ostensiblemente, así es que el objetivo de la corporación es minimizar sus costos de producción. En tal caso la función objetivo pasa a ser minimizar $z = 8\,c + 12\,s$, y el punto óptimo es (60, 40) con un costo de 960.000 [$].

Ejercicio 3: Evaluación de inversión de pureza del cobre

Suponga que el costo de producción de Choqui es 12 [US$/t] y el de Soldado es 8 [US$/t]. ¿Cuál es el óptimo de producción? ¿Conviene aumentar la pureza del cobre de Soldado de 90% a 96%?

Respuesta: el óptimo pasa a ser el punto (50,50) con un valor de 1.000.000 [$]. En esta nueva situación de costos, aumentar la pureza de Soldado no tiene efecto, porque la restricción de rapidez de entrega sigue limitando el área factible.

De lo anterior podemos deducir cuáles indicadores de la Tabla 1.3 son prioritarios en este escenario de precios bajos. Primero, los costos de producción, porque determinan el punto óptimo de producción. Si el costo de Soldado es mayor que el de Choqui, también es crucial la capacidad mínima de producción de Soldado. Si el costo de Choqui supera al de Soldado, entonces son relevantes los indicadores de pureza y de rapidez de ambas divisiones.

1.3 Transporte Público

1.3.1 Definición de la Flota

El año 2007 la ciudad de Santiago implantó un nuevo sistema de transporte de pasajeros que incluyó la centralización de pagos, la redefinición de recorridos y la planificación de la flota. Respecto de la flota, un aspecto a determinar fue la cantidad de autobuses, los cuales podían ser de cuatro tamaños: microbús de 42 pasajeros [p], autobús mediano de 65 [p], autobús grande de 80 [p] y autobús articulado de 160 [p].

A modo de simplificación, supondremos que para una cierta zona geográfica se debe decidir el número de microbuses y autobuses articulados de la Ilustración 1.10.

Ilustración 1.10: Microbuses y autobuses articulados

El número de pasajeros a transportar es de al menos 640 mil pasajeros al mes [Mp/mes]. Un microbús transporta 4 [Mp/mes] mientras que un bus articulado transporta 16 [Mp/mes]. Un microbús tiene un costo de 1 mil de unidades de fomento [UF] al mes por vehículo [MUF/mes/veh] mientras que un autobús articulado tiene un costo de 2 [MUF/mes/veh]. El presupuesto máximo para el sistema de transporte es 140 [MUF/mes]. Debido a restricciones administrativas, la flota total (microbuses más buses articulados) no puede

superar los 100 [veh]. Debido a la poca maniobrabilidad de los buses articulados, la congestión vehicular que produce cada uno es equivalente a la de seis microbuses.

Suponga que el objetivo de la autoridad es minimizar la congestión vehicular en la ciudad. Para obtener la combinación óptima de vehículos definimos:

z	congestión vehicular, medido en "microbuses equivalentes";
m	número de microbuses;
a	número de autobuses articulados.

El problema lineal que calcula la flota óptima es:

Minimizar $z = m + 6\,a$		
sujeto a:	$m + 2\,a \leq 140$	Gasto máximo;
	$4\,m + 16\,a \geq 640$	Pasajeros a transportar;
	$m + a \leq 100$	Flota máxima;
	$m, a \geq 0.$	

La Ilustración 1.11 muestra la solución gráfica del problema. El punto óptimo es $m = 80$ microbuses y $a = 20$ buses articulados, con una congestión $z = 1 \cdot 80 + 6 \cdot 20 = 200$. En este punto son activas las restricciones del número de pasajeros a transportar y de flota máxima, por lo que la holgura de éstas es cero. La restricción de gasto máximo no es activa, ya que el gasto es 120 [MUF/mes], por lo tanto su holgura es de 20 [MUF/mes]. La restricción de no-negatividad de buses articulados es redundante.

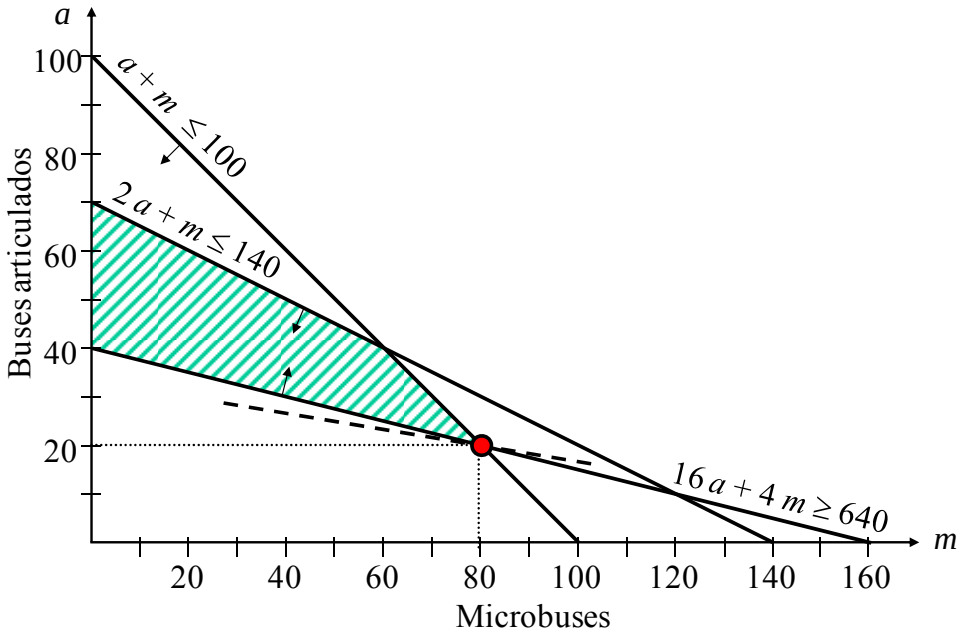


Ilustración 1.11: Composición de flota de transporte

Ejercicio 4: Transporte público

a) Suponga que los buses articulados son de propiedad de una cierta empresa, mientras que los microbuses están todos agrupados en un gremio. ¿A quién le conviene la

restricción del tamaño máximo de la flota $m + a \leq 100$, a la empresa de buses articulados o al gremio de los empresarios de microbuses?

b) Suponga que se plantea reducir el número máximo de vehículos a 50 con el objeto de descongestionar la ciudad. ¿Tiene tal medida el efecto deseado?

c) Volviendo a la situación inicial, ¿cuál es el menor gasto al que se puede llegar?

Respuestas:

a) Si eliminámos la restricción del tamaño máximo de la flota, la solución óptima al problema sería de 120 microbuses y 10 buses articulados, con una congestión igual a $1 \cdot 120 + 6 \cdot 10 = 180$ microbuses equivalentes. Por lo tanto, la restricción le conviene a la empresa de buses articulados, porque aumenta el tamaño de su flota.

b) Si definimos $m + a \leq 50$, el nuevo punto óptimo será 13,3 microbuses y 36,6 buses articulados. Con esta medida la congestión subiría a $1 \cdot 13{,}3 + 6 \cdot 36{,}6 = 233$ microbuses equivalentes.

c) Contraemos la restricción presupuestaria hasta reducir el área factible al punto (0, 40), cuyo gasto es igual a 80 [MUF/mes]. Con 0 microbuses y 40 buses articulados, la congestión sería de 240 microbuses equivalentes.

1.3.2 Incentivo Perverso

Volviendo al problema original, supongamos que se impone un gasto máximo de 100 [MUF/mes], lo que implica tener 40 microbuses y 30 buses articulados, con una congestión de 220 microbuses equivalentes. En tal caso, ¿cuán conveniente es para la empresa de buses articulados disminuir su tarifa de 2 [MUF/mes/veh] a 1 [MUF/mes/veh]?

Intuitivamente, si la tarifa de los buses articulados baja su cantidad demandada debería aumentar. Sin embargo, el resultado es el opuesto. Tal como lo muestra la Ilustración 1.12, modificar la restricción presupuestaria desde $m + 2\,a \leq 100$ [MUF/mes] a $m + a \leq 100$ [MUF/mes] equivale a "girarla" hacia la derecha con eje en el punto (100, 0). La nueva solución óptima es 80 microbuses y 20 buses articulados. Por lo tanto, a la empresa de buses articulados no le conviene bajar sus tarifas. Lo que le conviene es subir su tarifa (T_a) hasta el punto en que se contraten sólo buses articulados y ningún microbús, es decir, hasta el punto (0,40). Para calcular T_a, resolvemos: $m + T_a\,a = 100 \rightarrow T_a = 100/40 = 2{,}5$. Es decir, la tarifa óptima para los buses articulados es 2,5 [MUF/día/veh]. Ellos tienen un incentivo perverso para incrementar sus tarifas en lugar de reducirlas, lo que aumenta la congestión.

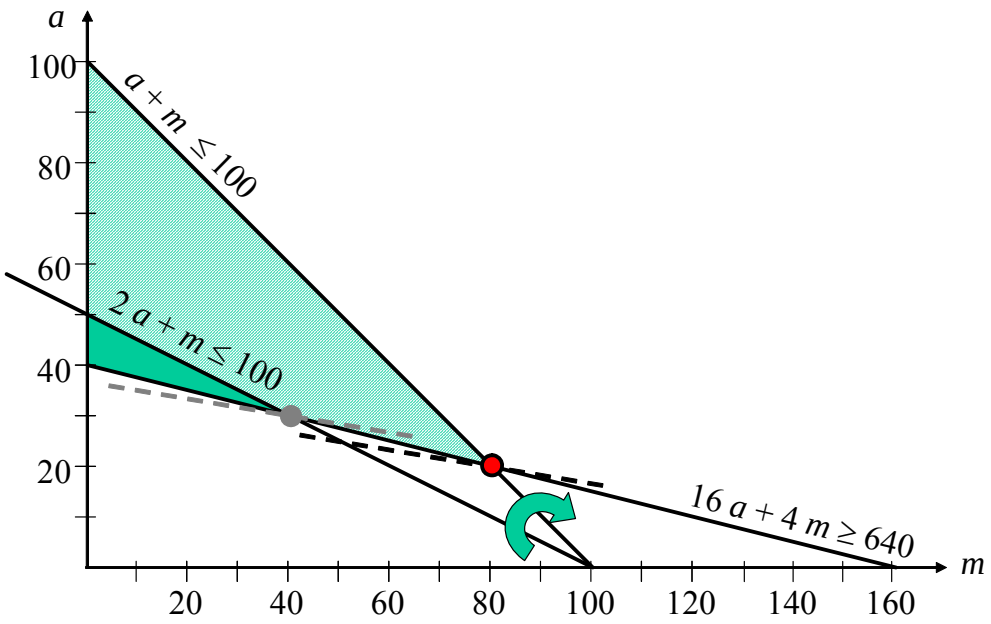


Ilustración 1.12: Representación gráfica de disminución de tarifa

1.4 Gestión de Procesos

Un *proceso* es una cadena de actividades que va transformando insumos en productos o servicios con el objeto de satisfacer los requerimientos de un cliente. Cada *actividad* es como una caja negra: se caracteriza por sus flujos de entrada (*input* en inglés), sus flujos de salida (*output* en inglés) y por los recursos que utiliza.

Uno de los propósitos de la *gestión de procesos* es optimizar los flujos entre las actividades y el uso de los recursos. Para ello utiliza el *diagrama de flujo*, que muestra las actividades más importantes y los flujos que las conectan (Hunt, 1996). La Ilustración 1.13 muestra una analogía para la gestión de procesos. Distintos flujos de insumos pasan de una etapa a otra para convertirse en productos, gracias a "bombas hidráulicas" cuya potencia proviene de los recursos disponibles. El objetivo es asignar los recursos de manera de que el flujo resultante sea óptimo para la organización.

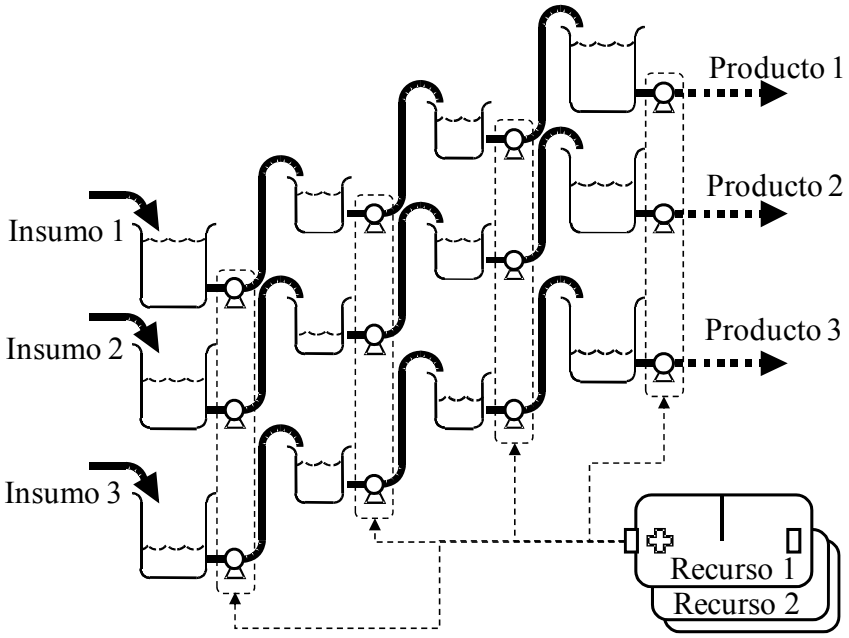


Ilustración 1.13: Analogía de la gestión de procesos

1.4.1 Planificación de una Tesorería

La tesorería del Estado es la institución encargada de recaudar las deudas que tienen los contribuyentes con el aparato público. El diagrama de flujo de la Ilustración 1.14 muestra su funcionamiento de manera simplificada. Las deudas son de dos tipos: F-21 con un valor unitario de 10.000 pesos [$] y F-29 con un valor unitario de 15.000 [$][14]. La cobranza consta de dos etapas, las cuales deben llevarse a cabo en forma secuencial. Para ello se dispone de dos recaudadores y un abogado que trabajan 336 horas al mes [h/mes] cada uno. Se ha impuesto la condición de que el tiempo de abogado dedicado a la primera etapa no sea superior al dedicado en la segunda etapa. La cartera actual es de 30 deudas F-29 y 50 deudas de F-21.

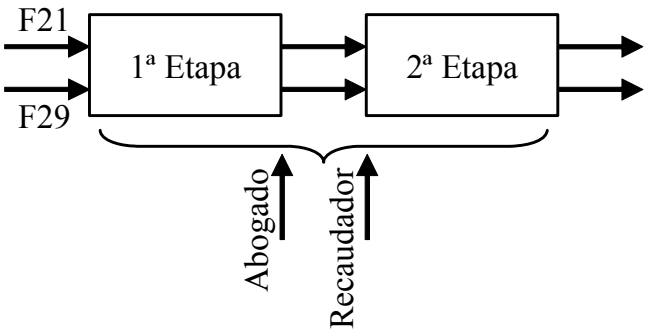


Ilustración 1.14: Diagrama de flujo de la cobranza en una tesorería

La Tabla 1.4 muestra las horas de trabajo que un recaudador y el abogado dedican a cada tipo de deuda en la primera y la segunda etapa de la cobranza.

[14] "F-21" significa formulario 21; "F-29" significa formulario 29.

Tabla 1.4: Horas de trabajo de recaudador y abogado por tipo de deuda

	1ª etapa		**2ª etapa**	
	Recaudador	**Abogado**	**Recaudador**	**Abogado**
F-21	5	4	3	2
F-29	14	4,5	13	7,5

Dado que los recursos disponibles no permiten procesar toda la cartera, hay que determinar cuál es la cantidad óptima a procesar de cada tipo de deuda. Para ello definimos:

f_{21} número de F-21 a tramitar;
f_{29} número de F-29 a tramitar.

Con ello planteamos el siguiente programa lineal:

Maximizar $z = 10.000\, f_{21} + 15.000\, f_{29}$
sujeto a:

$8\, f_{21} + 27\, f_{29} \leq 672$	Disponibilidad de recaudadores;
$6\, f_{21} + 12\, f_{29} \leq 336$	Disponibilidad del abogado;
$2\, f_{21} - 3\, f_{29} \leq 0 \rightarrow 2\, f_{21} \leq 3\, f_{29}$	Restricción tiempo de abogado;
$f_{21} \leq 50$	Cartera de F21;
$f_{29} \leq 30$	Cartera de F29;
$f_{21}, f_{29} \geq 0.$	

La Ilustración 1.15 muestra la solución gráfica del problema. La cartera óptima de cobranza debe ser 24 deudas F-21 y 16 deudas F-29, con una recaudación de 480.000 [$].

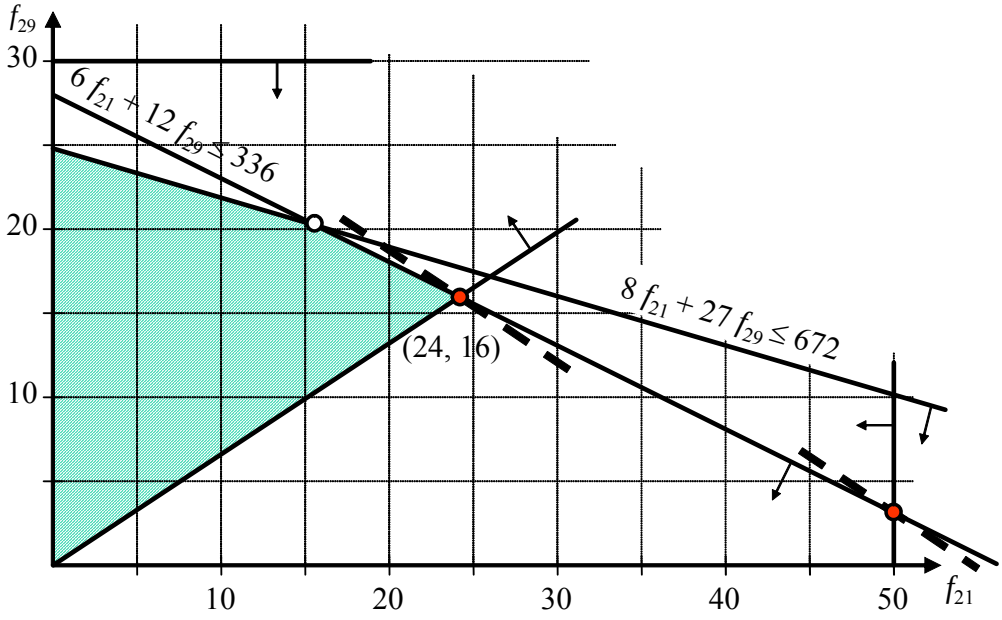


Ilustración 1.15: Solución gráfica de planificación de la cobranza

La restricción que describe la política de que el tiempo de abogado dedicado a la primera etapa no sea superior al dedicado en la segunda etapa es activa, así es que perjudica la función objetivo. Para calcular el perjuicio de esta política, eliminamos la desigualdad $2\, f_{21}$

$-3\ f_{29} \leq 0$. El nuevo punto óptimo está a la derecha de la Ilustración 1.15, en el que se cobran 50 deudas F-21 y 3 deudas F-29, con una recaudación de 545.000 [$]. Por lo tanto, la restricción de tiempo de abogado genera un perjuicio de 545.000 [$] – 480.000 [$] = 65.000 [$].

Agregar un recaudador por media jornada expande el área factible pero no mejora la solución óptima, pues la restricción $8\ f_{21} + 27\ f_{29} \leq 672$ no es activa. Por lo mismo, es posible disminuir el número de horas de recaudador sin perjudicar la función objetivo. Para calcular la máxima reducción, obtenemos el valor del término libre α de la ecuación $8\ f_{21} + 27\ f_{29} = \alpha$ que la haría pasar por el punto óptimo (24, 16), que corresponde a $\alpha = 624$. Por lo tanto, imponer la restricción $8\ f_{21} + 27\ f_{29} \leq 624$ sigue generando 480.000 [$] y ahorra 672 [h] – 624 [h] = 48 [h] de recaudador.

Supongamos que se decide aumentar la eficiencia del abogado en la tramitación de F-21, por ejemplo mediante alguna inversión en tecnología. Esto significa que la pendiente de la restricción correspondiente se hace más horizontal, pues disminuye el coeficiente que multiplica a f_{21}. Dado que la eficiencia respecto de las deudas F-29 no cambia, la recta de la restricción continúa pasando por el punto (0, 28). En otras palabras, la recta de la restricción gira hacia arriba con eje en el punto (0, 28). Suponemos que la restricción tiempo de abogado $2\ f_{21} \leq 3\ f_{29}$ no cambia, lo que implica que la diferencia entre el tiempo dedicado a la primera etapa y el dedicado a la segunda etapa se mantiene constante. Bajamos el costo unitario del abogado en la tramitación de F-21 hasta que la recta de la restricción pasa por el punto (25,8; 17,2), lo que ocurre cuando el costo unitario es 5 [h/deuda]. En este punto se alcanza una recaudación máxima de 516.923 [$]. Si el costo baja aun más, la restricción se hace redundante, por lo que no hay beneficio adicional.

Otra alternativa para aumentar la recaudación es contratar más horas de abogado, las que supondremos que tienen un costo fijo de 1.200 [$/h]. El beneficio marginal de cada hora se puede calcular aumentando el término libre de la restricción $6\ f_{21} + 12\ f_{29} \leq 336$ a 337. El nuevo punto óptimo es (24,07; 16,04), cuya recaudación es 481.428 [$], lo que significa un beneficio marginal de 481.428 [$] – 480.000 [$] = 1.428 [$]. Tal beneficio se mantiene hasta llegar a 362, luego de lo cual la restricción se hace redundante. Por lo tanto, conviene aumentar 362 [h] – 336 [h] = 26 [h] de abogado, lo que tiene un beneficio neto de 1.428 [$] – $1.200 [$] = 228 [$] por cada hora adicional.

La dedicación de ambos recaudadores a la primera y segunda etapa es flexible; es decir, pueden destinar cuantas horas deseen a una u otra etapa. Si se les impusiera que uno de ellos se debe abocar a la primera etapa y el otro a la segunda etapa, deberíamos reemplazar la restricción $8\ f_{21} + 27\ f_{29} \leq 672$ por dos restricciones: $5\ f_{21} + 14\ f_{30} \leq 336$ para la primera etapa y $3\ f_{21} + 13\ f_{30} \leq 336$ para la segunda etapa. La Ilustración 1.16 muestra el resultado de esta modificación. La restricción del recaudador de la primera etapa elimina parte del área factible, y la restricción del recaudador de la segunda etapa se hace redundante. La solución óptima es el punto (23,4; 15,6), con una recaudación de 468.837 [$].

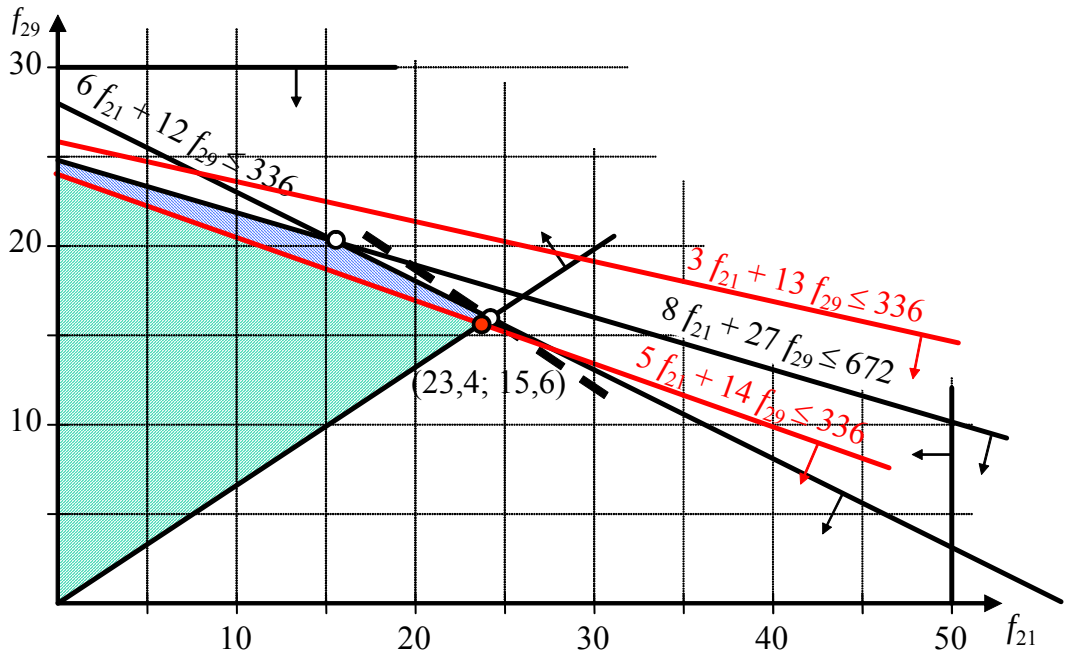


Ilustración 1.16: Planificación de la cobranza con recaudadores dedicados

1.4.2 Caso Práctico

El modelo descrito (o una versión más realista) puede determinar cuál es la combinación óptima de deudas a procesar, dada la cartera de deudas, la disponibilidad de recursos y otras restricciones de operación. También puede evaluar el desempeño y cuán rentable sería la asignación de recursos adicionales.

Un análisis de este tipo fue aplicado a las 35 oficinas provinciales de la Tesorería General de la República de Chile (Singer, Donoso & Poblete, 2002). El estudio consideró ocho familias de deudas, cuatro etapas y seis recursos. Para cada combinación deuda-etapa-recurso, se estimó el costo de procesamiento. Además se consideraron indicadores particulares de la operación que no están en el modelo de la Sección 1.4.1, como probabilidad de abandono y la permanencia máxima de las deudas en cada etapa. El programa lineal incluyó 384 variables de decisión, 358 parámetros y 1.380 restricciones, y fue optimizado por una versión profesional de Solver de Microsoft Excel. La Ilustración 1.17 muestra la recaudación estimada para el año 2000 de las 35 oficinas y la razón (recaudación real / recaudación estimada), que es una medida de eficiencia[15].

[15] Por confidencialidad, se eliminaron las unidades del eje de la eficiencia.

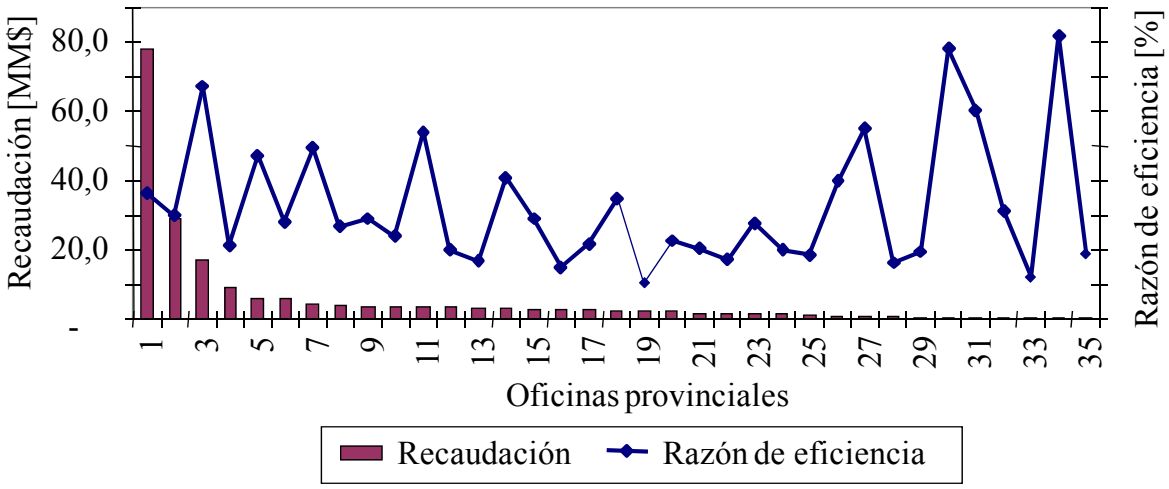


Ilustración 1.17: Recaudación y eficiencia de las oficinas provinciales

La Ilustración 1.18 muestra el análisis del beneficio marginal neto de contratar más abogados para una de las oficinas provinciales. El costo marginal de un minuto adicional es constante: 63 [$/min]. El beneficio marginal depende de cuántos abogados nuevos se han agregado. Cuando ya existe uno, un minuto adicional incrementa en 182 [$/min] la función objetivo. Cuando existen 1,5 abogados, el incremento es 100 [$/min]. Con estos dos puntos podemos aproximar el beneficio neto de media jornada adicional como el área bajo la curva de beneficio marginal y sobre la línea de costo marginal. Considerando que la media jornada tiene 5.280 [min/mes], el área bajo la curva es 5.280 [min/mes] · ((182 – 63) + (100 – 63)/2) [$/min] = 726.000 [$/mes]. Un análisis similar muestra que una segunda media jornada tiene un beneficio mucho menor, por lo que no vale la pena contratarla.

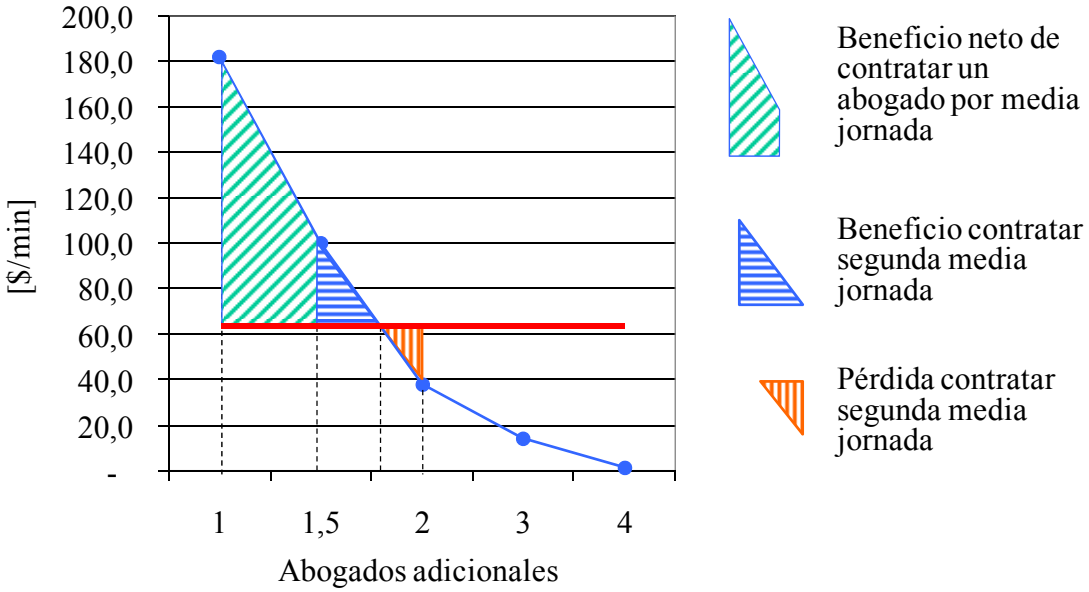


Ilustración 1.18: Análisis del beneficio marginal de nuevas contrataciones

1.5 Posicionamiento de un Banco

1.5.1 Definición de la Función Objetivo

Un banco asigna un máximo de $1.600 millones de pesos [MM$] mensuales para préstamos de consumo y de vivienda. El banco cobra una tasa de interés anual de 30% a préstamos de consumo y de 10% a préstamos de vivienda. Se dispone de 10 ejecutivos trabajando 252 horas-hombre [hh] quienes dedican 1,8 [hh] por cada 1 [MM$] destinado a préstamos de consumo y 1,4 [hh] por cada 1 [MM$] destinado a préstamos de vivienda[16]. La experiencia demuestra que el 10% de los préstamos de consumo se vuelven incobrables.

Para encontrar la manera óptima de asignar el presupuesto del banco, plantearemos un programa lineal, pero con dos alternativas de función objetivo. La primera función objetivo maximiza la renta debido a los intereses y a los incobrables del capital prestado. En ambos casos no consideramos el valor-tiempo del dinero, es decir, no aplicamos una tasa de descuento para los flujos futuros.

Variables de decisión:

c monto a préstamos de consumo en [MM$];
v monto a préstamos de vivienda en [MM$].

Maximizar $z_1 = (0{,}3 \cdot 0{,}9 - 1 \cdot 0{,}1)\, c + 0{,}1\, v = 0{,}17\, c + 0{,}1\, v$

sujeto a:

$c + v \leq 1.600$ Presupuesto;
$1{,}8\, c + 1{,}4\, v \leq 2.520$ Horas-hombre;
$v, c \geq 0$.

La segunda función objetivo maximiza los pagos percibidos por el dinero prestado, esto es, el flujo de caja obtenido por el banco una vez otorgados los préstamos.

Maximizar $z_2 = (0{,}9 \cdot 1{,}3)\, c + 1{,}1\, v = 1{,}17\, c + 1{,}1\, v$.

¿Son equivalentes ambas funciones objetivo? Si no lo son, ¿entregan el mismo resultado? ¿Cuál es la correcta?

Si bien ambas funciones tienen una lógica común, no son equivalentes pues sus pendientes son distintas. Si las pendientes son distintas, pueden generar diferentes puntos óptimos. Entonces, ¿cuál función objetivo es la correcta?

Una manera de averiguarlo es modificando el valor de los parámetros y evaluando si el óptimo encontrado es intuitivamente razonable. Por ejemplo, supongamos que las tasas de interés son negativas, digamos porque existe inflación. El punto óptimo de z_1 sería (0, 0), en tanto el punto óptimo de z_2 sería positivo para ambos tipos de préstamo. Dado que ante tasas de interés negativas el sentido común recomienda no prestar dinero, deducimos que z_1 es más idónea.

La falencia de z_2 es que supone implícitamente que se debe prestar todo el dinero, es decir, que la restricción $c + v \leq 1.600$ debe activarse. Para comprobarlo, definamos z_1' como la

[16] El costo en recursos humanos es usualmente el de mayor relevancia para las empresas.

función objetivo z_1, con el supuesto adicional de que $c + v \leq 1.600$ está activa. Si a z_1' le sumamos una constante, mantiene su pendiente. Supongamos que esa constante es 1.600 [$]. Como se está cumpliendo la igualdad $c + v = 1.600$, estamos sumando a z_1' la expresión $c + v$. Al hacerlo, z_1' se convierte en z_2:

$$z_1' = 0{,}17\ c + 0{,}1\ v + 1.600 = 0{,}17\ c + 0{,}1\ v + c + v = 1{,}17\ c + 1{,}1\ v = z_2.$$

La función objetivo z_2 no corresponde exactamente al flujo de caja, pues ignora el desembolso inicial $c + v$. Si definimos z_2' igual a z_2 más el flujo inicial negativo del préstamo, z_2' se convierte en z_1:

$$z_2' = 1{,}17\ c + 1{,}1\ v - (c + v) = 0{,}17\ c + 0{,}1\ v = z_1.$$

La Ilustración 1.19 muestra el área factible del problema. La elección de una u otra función objetivo tiene un efecto crucial en la cartera de colocaciones del banco. Si utilizamos la función correcta z_1, el banco se concentra en créditos de consumo. Si utilizamos la función errónea z_2 el banco reparte casi equitativamente su presupuesto entre ambos tipos de préstamos.

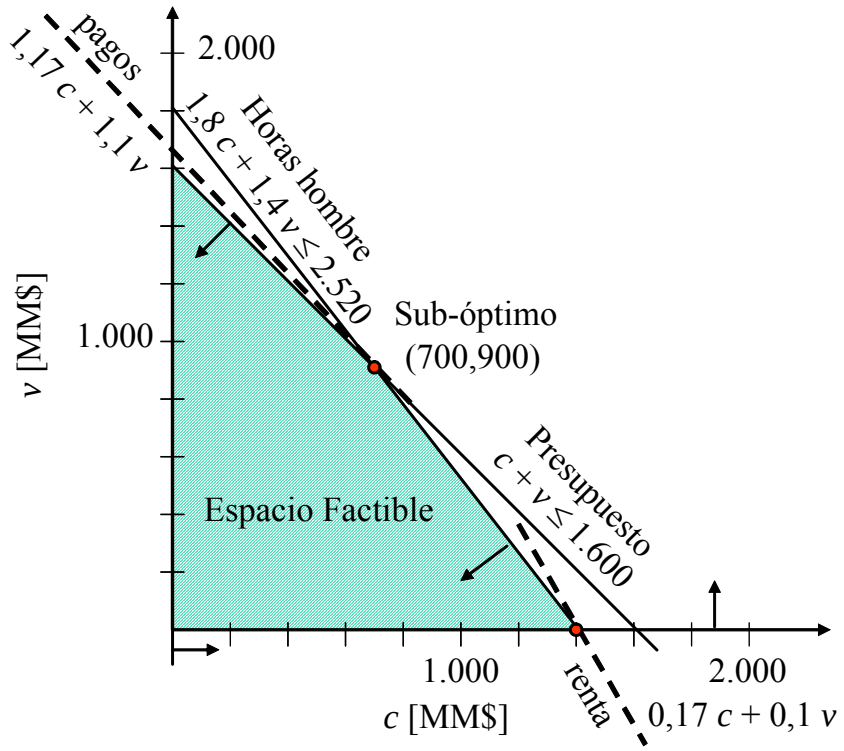


Ilustración 1.19: Colocaciones del banco

1.5.2 Activación de Restricciones

Habiendo definido que los créditos de consumo son los más convenientes, supongamos que el banco debe determinar la cartera óptima de crédito. Para ello considera el diagrama de flujo de la Ilustración 1.20, conformado por tres unidades principales: Gerencia de Sucursales, Gerencia de Microcrédito y Gerencia de Operaciones. Las dos primeras,

denominadas *front-office*, atienden público y con ello generan requerimientos que son procesados por el *back-office* del banco. El producto A (crédito tradicional) requiere 2 horas por unidad [h/u] para ser procesado por el *front-office* y otras 2 [h/u] por el *back-office*, haciendo un total de 4 [h/u]. El producto B (microcrédito) necesita 2,5 [h/u] y 1,5 [h/u], lo que también hace un total de 4 [h/u].

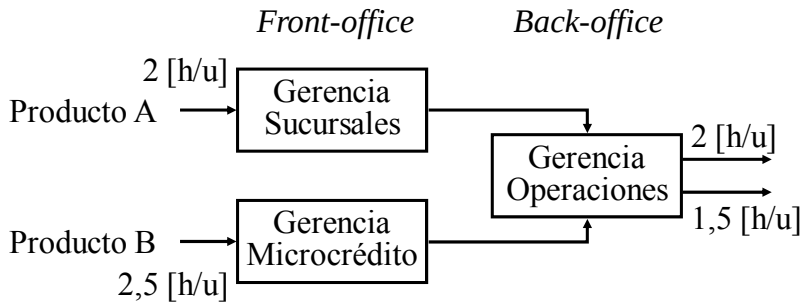


Ilustración 1.20: Diagrama de flujo del banco

El banco desea determinar cuánto tiempo dedicar al producto A (crédito tradicional) y cuánto tiempo dedicar al producto B (microcrédito). La Tabla 1.5 presenta antecedentes adicionales (Hopp & Spearman, 1996 p. 206). Supondremos que cada gerencia funciona 336 horas al mes [h/mes] y que su costo fijo de mano de obra total es 100.000 [$].

Tabla 1.5: Datos de la planificación del banco

Producto	**Precio Venta**	**Costo Variable**	**Cantidad Mínima**	**Demanda (Máxima)**
A	600[$/u]	50 [$/u]	75 [u]	140 [u]
B	600[$/u]	100 [$/u]	0 [u]	140 [u]

Frente a decisiones relativamente complejas, usualmente las personas utilizamos *heurísticas*[17], es decir, reglas o criterios que se aproximan razonablemente a la decisión óptima, pero que demandan un esfuerzo significativamente menor (Simon, 1955). Una de las heurísticas más comunes es procesar secuencial o jerárquicamente la información disponible.

Una heurística posible para resolver este problema es:

1) Ignorar el costo fijo de mano de obra como elemento de decisión, pues ambos productos utilizan en total 4 [h].
2) Producir el máximo del producto A, ya que su beneficio es 550 [$/u] y el beneficio del producto B es 500 [$/u].
3) Dado que la máxima producción de A es 336 [h]/2 [h/u] = 168 [u], pero su demanda es 140 [u], usar sólo 280 [h] en el producto A, dejando libres 336 [h] – 280 [h] = 56 [h].
4) Producir 56 [h]/1,5 [h/u] ≅ 37 [u] del producto B.

La utilidad final es: 140 [u] · 550 [$/u] + 37[u] · 500 [$/u] – 100.000 [$] = -4.500 [$]. Es decir, el banco pierde dinero.

[17] De cuando Arquímedes descubrió por qué flotan los elementos y exclamó "¡eureka!" ("¡lo encontré!").

A diferencia de la heurística recién descrita, la programación lineal considera toda la información disponible de manera simultánea. La modelación es:

- Variables a y b: cantidades a producir de A y de B.
- Función objetivo z = ingresos – costos = 550 a + 500 b – 100.000.
- Espacio factible: definido por las restricciones de capacidad de las gerencias, el compromiso de venta de A, la demanda de A y B, y la no-negatividad de B.

Este problema de decisión se traduce en el siguiente programa lineal:

Maximizar $z = 550\,a + 500\,b - 100.000$
sujeto a:

$2\,a \leq 336$	Gerencia Sucursales;
$2{,}5\,b \leq 336$	Gerencia Microcrédito;
$2\,a + 1{,}5\,b \leq 336$	Gerencia Operaciones;
$75 \leq a$	Mínimo de A;
$a \leq 140$	Demanda de A;
$b \leq 140$	Demanda de B;
$0 \leq b$.	

La Ilustración 1.21 muestra que el resultado óptimo es a = 75 [u] y b = 124 [u], lo cual significa una utilidad de 75 · 550 [$] + 124 · 500 [$] – 100.000 [$] = 3.250 [$]. Las restricciones activas son el mínimo de A (75 ≤ a) y la capacidad de la Gerencia de Operaciones (2 a + 1,5 b ≤ 336). En este caso la Gerencia de Operaciones es el *cuello de botella* del banco pues, a diferencia de las restricciones de las gerencias de *front-office*, la restricción de la Gerencia de Operaciones no tiene holgura respecto del punto óptimo.

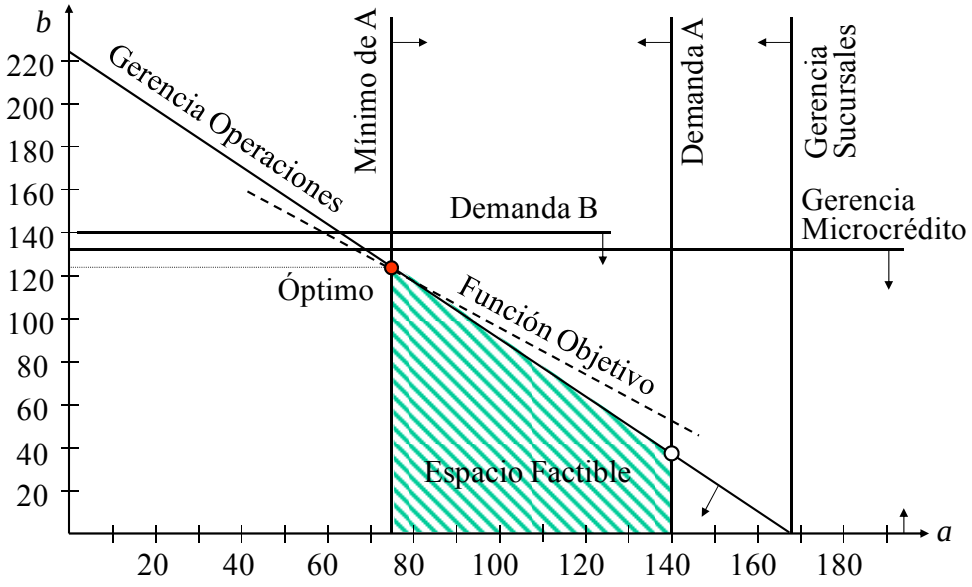


Ilustración 1.21: Resolución gráfica de la planificación del banco

La heurística de producir la máxima cantidad posible del producto A, pues es el producto con mayor beneficio, significa activar la restricción de demanda de A en la Ilustración 1.21. Como la Gerencia de Operaciones no completa su capacidad máxima de producción con A,

se puede producir producto B hasta agotar las horas disponibles de dicha gerencia, activándose la restricción de la Gerencia de Operaciones. El resultado (140,37) es la intersección de ambas restricciones activas. Observamos que la heurística está en lo correcto al suponer que el óptimo está en la frontera del área factible. Su error radica en la elección de cuáles restricciones debe activar.

Apéndice: Programación No-lineal

Si bien el foco de este texto es la programación lineal, muchos de sus principios son válidos para la programación no-lineal, esto es, aquella en que las variables de decisión no necesariamente están en potencia de uno. Desde el punto de vista geométrico, tanto la función objetivo como las restricciones no-lineales no son rectas, sino curvas.

Ejemplificaremos su uso en la teoría de la negociación, que estudia la manera en que dos o más agentes acuerdan la forma como se repartirán el beneficio de una transacción. La negociación ha sido estudiada desde diversos puntos de vista (Singer, 2009: pp. 199-216), incluyendo el llamado enfoque axiomático propuesto por John Nash (1928-).

<u>Solución Negociada de Nash</u>

Nash (1950, 1953) supone que el resultado de una negociación no depende de la habilidad de los negociadores, sino de las siguientes circunstancias objetivas.

- Las alternativas al acuerdo negociado: mientras mejor es la alternativa disponible para un cierto agente, mayor es su fuerza negociadora, lo cual implica que obtiene un mayor beneficio en la negociación a costa de la contraparte.
- Las preferencias por riesgo: aunque ninguno de los agentes desea que la negociación fracase, existe la posibilidad de que ello ocurra si no logran llegar a un acuerdo. Aquel agente que está más dispuesto a correr riesgos, tiene mayor fuerza negociadora.

  Las preferencias por riesgo se modelan mediante la función de utilidad $u(x)$ de Von Neumann & Morgenstern (1944). Esta función hace un mapeo entre ingresos económicos x a una escala abstracta de utilidad u, gracias a lo cual se puede estimar la valoración que tiene el agente de flujos de caja inciertos. Mientras más cóncava es $u(x)$, mayor aversión muestra el agente a correr riesgos.

Definiendo x_1 y x_2 como las cantidades obtenidas por los agentes 1 y 2 de un botín de tamaño B, Nash postula que un acuerdo negociado debe cumplir con las siguientes cuatro condiciones (axiomas):

1. Eficiencia de Pareto: no se "deja dinero en la mesa", así es que $x_1 + x_2 = \mathrm{B}$;
2. Simetría: definiendo u_1 y u_2 como las funciones de utilidad de ambos agentes, y f_1 y f_2 como los valores obtenidos en caso de fracaso de la negociación, si $u_1 = u_2$ y $f_1 = f_2$, entonces $x_1 = x_2$;
3. Invariabilidad respecto de transformaciones afines: el acuerdo no depende de cómo se representan las preferencias por riesgo de cada jugador, sólo de la concavidad de la curva de utilidad;
4. Independencia de alternativas irrelevantes: el acuerdo no cambia si algunas alternativas no-deseables de repartición del botín se vuelven no-factibles.

A partir de estos cuatro axiomas, deduce la llamada *solución negociada de Nash*, que define a x_1 y x_2 como las variables que resuelven el siguiente *programa no-lineal*:

Maximizar $(u_1(x_1) - f_1)\,(u_2(x_2) - f_2)$
sujeto a: x_1 y x_2 son factibles.

Aplicación 1: Proyecto de Inversión

Supongamos que la empresa X y la empresa Y deben negociar la manera en que se repartirán el valor presente neto (VAN) de un proyecto de 95 millones de dólares [MMUS$]. Ninguna de las partes obtiene beneficios si la otra no concurre al acuerdo, por lo que el fracaso de la negociación tiene para ambas partes un valor igual a cero, es decir, $f_1 = f_2 = 0$.

Según Kirkwood (2004), una de las funciones de utilidad más utilizada es la función de utilidad exponencial, que muestra una aversión constante al riesgo. Su forma funcional es:

$$u(x) = 1 - \exp(-\alpha\, x).$$

El parámetro $\alpha(x)$ es la aversión al riesgo del agente, igual a $-u''(x)/u'(x)$. Definiremos a $\alpha(x)$ como lo reporta Howard (1988) para las corporaciones norteamericanas: el recíproco del 6% de las ventas anuales. Definiendo que las ventas anuales de la empresa X y la empresa Y son 200 [MMUS$] y 1.000 [MMUS$] respectivamente, $\alpha_X = 1/(6\% \cdot 200$ [MMUS$]) y $\alpha_Y = 1/(6\% \cdot 1.000$ [MMUS$])). Supondremos que por motivos de equidad, por cada 5 [US$] que obtiene Y, X no puede obtener menos de 2 [US$], y por cada 3 [US$] que obtiene X, Y debe obtener 2 [US$] o más.

La Ilustración 1.22 muestra varias isocuantas de la función objetivo de la solución negociada de Nash. La restricción $x + y \leq 95$ corresponde a la factibilidad de la división de los beneficios del proyecto. La solución óptima A es aproximadamente el punto (30, 65) lo que implica que Y, cinco veces más grande que X, obtiene 65/95 = 68,4% de los beneficios del proyecto. Si se impusiera la restricción de que X no reciba menos de 40 [MMUS$], el óptimo sería el punto B = (40, 55).

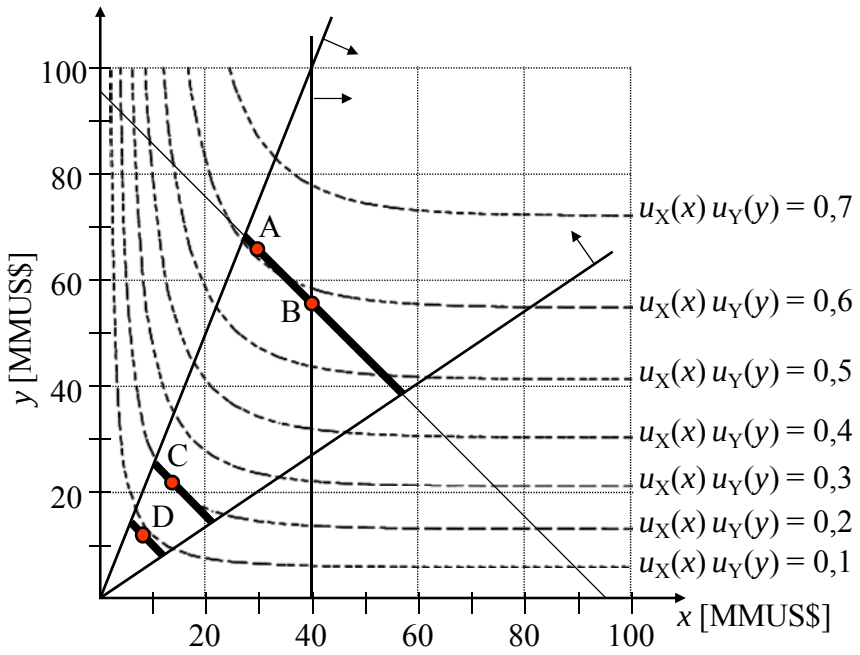


Ilustración 1.22: Solución negociada de Nash

Si el VAN del proyecto es 35 [MMUS$], la solución óptima C es aproximadamente el punto (14, 21), lo que implica que Y obtiene 21/35 = 60% de los beneficios del proyecto. Si el VAN es 2 [MMUS$], la solución óptima D es aproximadamente el punto (9, 11), lo que implica que Y obtiene 11/20 = 55% de los beneficios del proyecto. Por lo tanto, mientras más grande es el monto del proyecto, más conveniente es la solución negociada para la empresa de mayor tamaño. La intuición detrás de este resultado es que para la empresa X el proyecto original es de vital importancia – su VAN es casi la mitad de las ventas de un año – por lo que no puede arriesgarse a que fracase. Para la empresa Y el proyecto es mucho menos relevante, menos de un décimo de las ventas anuales, y por ende puede darse el lujo de que no se realice. Esta predisposición relativa a no llegar a un acuerdo le permite obtener el grueso de los beneficios.

Caso Computacional 2: Negociación de Beneficios de un Proyecto

Calcule utilizando Solver de Microsoft Excel el valor preciso de asignación de beneficios del proyecto, con un VAN de 95, 35 y 20 [MMUS$] respectivamente.

Respuestas:
Para un VAN de 95 [MMUS$], la asignación es el punto (28,8; 66,2). Para un VAN de 35 [MMUS$], la asignación es el punto (13,7; 21,3). Para un VAN de 20 [MMUS$], la asignación es el punto (8,6; 11,4).

Aplicación 2: Tarifas del Transporte Naviero

Gran parte del transporte internacional de productos se realiza mediante contenedores (cajas estándares de acero de 6 pies de ancho, 6 pies de alto por 20 pies de largo). Las compañías navieras cobran a los despachadores (empresas que exportan productos) un

precio p_{AB} "de ida" por el tramo desde el puerto A al puerto B, y un precio p_{BA} "de vuelta" por el tramo desde el puerto B al puerto A por cada contenedor que lleva productos. Si está vacío, la naviera no puede cobrar por ellos. Generalmente el flujo total de productos desde A hasta B es mucho mayor que desde B hasta A. En la ruta Transpacífica, desde Asia a Norteamérica, el viaje de vuelta lleva un 40% del flujo de productos de ida. Dado que la naviera cobra p_{AB} y p_{BA} independientemente de cuán cargado va el contenedor, al despachador le conviene llenarlo completamente. Por lo tanto, o bien el contenedor va 100% lleno o vacío. Debido al des-balance de carga, todos los contenedores desde A hasta B van llenos, y sólo R < 100% regresan llenos desde B hasta A; el resto (1 – R) regresan vacíos.

El costo de operación por contenedor de la naviera consta de una parte fija C por el circuito desde A hasta B y de regreso al puerto A (A→B→A). Este costo, que incluye la operación del barco, no depende de si va cargado el contenedor. Existe además un costo extra por tramo E (o marginal) en el que la naviera incurre sólo si el contenedor va cargado.

La determinación de p_{AB} y p_{BA} está sujeta a las siguientes restricciones lineales:

- Mínimo de ida: p_{AB} no puede ser menor que el costo marginal E.
- Mínimo de vuelta: p_{BA} no puede ser menor que el costo marginal E.
- Costo del circuito: los ingresos de la naviera (en términos de p_{AB} y p_{BA}) deben por lo menos cubrir los costos del circuito.
- Máxima rentabilidad: los ingresos de la naviera no pueden ser mayores que 1,5 veces sus costos. Esto es, el margen (ingreso – costo)/costo de la naviera no puede superar el 50%.

Ejercicio 5: Transporte Naviero

a) Explique verbalmente por qué todos los contenedores desde A hasta B van llenos si R es mucho menor que 100%.

b) Exprese en términos de C, E, R, p_{AB} y p_{BA} la restricción del costo del circuito.

c) Exprese en términos de C, E, R, p_{AB} y p_{BA} la restricción de la máxima rentabilidad.

d) Grafique en el espacio de decisión de p_{BA} (eje horizontal) y p_{AB} (eje vertical) las cuatro restricciones del problema. Para el dibujo considere que R es más o menos 70%, y que C es seis veces E.

e) Suponga que hay muchas navieras haciendo el circuito A→B→A, que R es mucho menor que 100% y que los despachadores en B optan por la naviera que les ofrezca el precio p_{BA} más bajo. ¿Cuál restricción debería activarse y por qué?

f) Suponga que el negocio del transporte naviero prácticamente no tiene barreras a la entrada, así es que se converge a una competencia perfecta (Sjostrom, 2004). ¿Cuál restricción debería activarse y por qué?

g) Si se cumplen las condiciones de las dos preguntas anteriores, ¿cuáles deberían ser los precios p_{AB} y p_{BA} en función de C, E y R? (Gómez-Ibáñez, 1999).

Respuestas:

a) Sólo tendría sentido mandar vacío un contenedor desde A hasta B si el contenedor será cargado en B para traerlo hasta A. Si R está lejos de 100%, digamos 70%, el 30% de los contenedores regresan vacíos. Dada esta gran capacidad ociosa, llevar vacío un contenedor desde A hasta B sólo incrementa los costos.

b) La restricción es $p_{AB} + R\, p_{BA} \geq C + (1 + R)\, E$.

c) La restricción es $p_{AB} + R\, p_{BA} \leq 1{,}5(C + (1 + R)\, E)$.

d) Ilustración 1.23 muestra el área factible para las tarifas navieras.

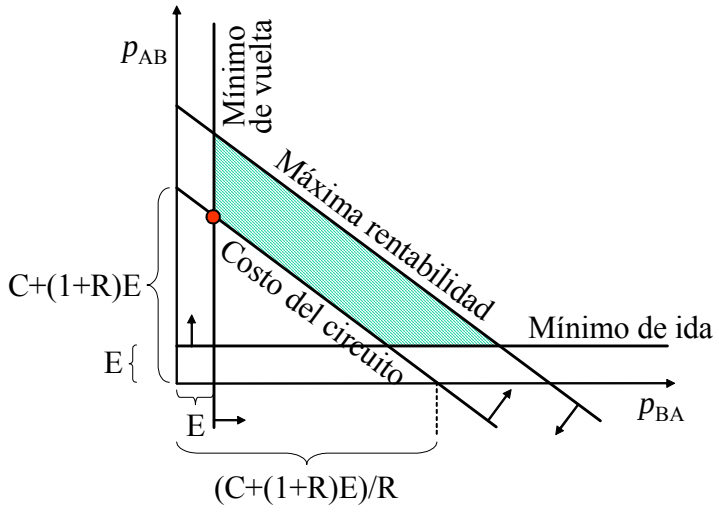


Ilustración 1.23: Factibilidad de tarifas navieras

e) Dado que R es mucho menor que 100%, hay muchos contenedores volviendo vacíos. Cualquier naviera que cobre $p_{BA} > E$ no llenará su contenedor, porque otra ofrecerá cobrar p_{BA}^* tal que $p_{BA} > p_{BA}^* \geq E$. Cualquier colusión de precios es improbable si hay muchas navieras. Por lo tanto, los precios caerán a E, lo que activará la restricción de mínimo de vuelta: $p_{BA} = E$.

f) Si hay competencia perfecta, entonces los márgenes son cercanos a cero, así es que se activa la restricción de costo del circuito: $p_{AB} + R\, p_{BA} = C + (1 + R)\, E$.

g) Al intersecar las restricciones de mínimo de vuelta y de costo del circuito, resulta $p_{AB} = C + E$ y $p_{BA} = E$.

Las tarifas navieras históricas no concuerdan con $p_{AB} = C + E$ y $p_{BA} = E$. La Ilustración 1.24 muestra el promedio de tarifas entre los puertos de Asia (Singapur, Hong-Kong, Shanghái, Busan) y los puertos de Europa (Hamburgo, Róterdam, Antwerp, Algeciras), durante 44 trimestres. Según Notteboom (2006), E es alrededor de un 10% de C y con certeza menor que 20%, así es que hasta el año 1998 y alrededor del año 2002 las tarifas están muy lejos de lo que señala el modelo.

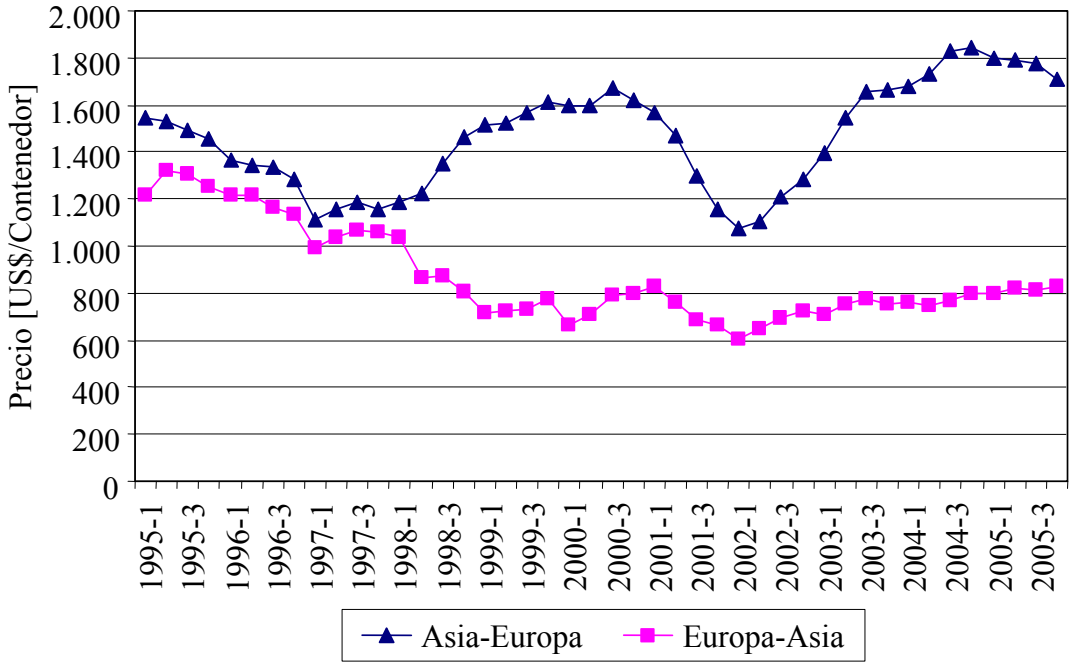


Ilustración 1.24: Precios navieros internacionales

Como alternativa al cálculo del **Ejercicio 5**, podemos aplicar el enfoque de Nash (Singer, Pardo & Sánchez, 2009). Para ello definimos las siguientes magnitudes.

I Ingreso que obtiene un productor por vender sus productos puestos en destino. Supondremos que I es similar para ambos destinos.

$u_{AB}(p_{BA})$ Utilidad del productor en A por llegar a un acuerdo con el productor en B para compartir el contenedor, igual a $I - (C + (1 + R) E - R\, p_{BA})$.

F_{AB} Utilidad del productor en A si no llega a acuerdo con el productor en B, por lo que se ve obligado a financiar toda la operación del contenedor, que retornará vacío. Es igual a $I - (C + E)$.

$u_{BA}(p_{BA})$ Análogo a $u_{AB}(p_{BA})$, para el productor de B. Es igual a $(I - p_{BA})\, R$.

F_{BA} Análogo a F_{AB}, para el productor de B. Es igual a $(I - (C + E))\, R$.

De acuerdo con el modelo de Nash, p_{BA} debe resolver:

$$\text{Maximizar } (u_{AB}(p_{BA}) - F_{AB})\,(u_{BA}(p_{BA}) - F_{BA}), \text{ sujeto a } p_{BA} \geq 0.$$

Esto es análogo a:

$$\text{Maximizar } (C + E - p_{BA})\,(p_{BA} - E)\, R^2, \text{ sujeto a } p_{BA} \geq 0.$$

Resolviendo esta optimización mediante la condición de primer orden obtenemos:

$$P_{AB} = R\, C/2 + (1 - R)\, C + E;$$

$$P_{BA} = C/2 + E.$$

Interpretamos estos resultados como la siguiente norma de "justicia": con probabilidad R el productor en A comparte el contenedor con el productor en B, así es que paga C/2; con probabilidad (1 – R) no lo comparte porque no hay carga de retorno, así es que paga todo el

costo C; a lo anterior siempre debe agregarse el costo marginal E. El productor en B siempre comparte el contenedor, así es que paga C/2 más el costo marginal E.

Para validar estos resultados, se estudiaron las tarifas de las tres rutas interoceánicas más importantes del mundo: Transatlántica, Transpacífica y Europa-Asia. En las tres rutas se obtuvo una significación estadística de 99%.

Ejercicios Resueltos

1) Se debe determinar la cantidad de ovejas, cerdos y vacas a criar en una finca. El espacio disponible permite criar 30 ovejas o 50 cerdos o 20 vacas o cualquier combinación lineal convexa (combinación de ovejas, cerdos y vacas que ocupen todo el espacio disponible). La utilidad por cada oveja, cerdo y vaca es 5, 4 y 10 respectivamente. Plantee el programa lineal que maximiza la utilidad de la finca.

   Solución

   Definamos las variables de decisión:

   o número de ovejas a criar en espacio disponible;
   c número de cerdos a criar en espacio disponible;
   v número de vacas a criar en espacio disponible.

   El programa lineal es:

   Maximizar $z = 5\,o + 4\,c + 10\,v$
   sujeto a: $o / 30 + c / 50 + v / 20 \leq 1;$
   $o, c, v \geq 0.$

   La restricción de espacio permite cualquier combinación de o, c y v, en tanto se cumpla que 3 ovejas, 5 cerdos ó 2 vacas ocupen el mismo espacio. Dicha restricción está señalando que si $o > 0$, $c = 0$ y $v = 0$, entonces el máximo valor para o es igual a 30 ovejas. Si $o = 0$, $c > 0$ y $v = 0$, entonces el máximo valor para c es igual a 50 cerdos, y si $o = 0$, $c = 0$ y $v > 0$, entonces el máximo valor para v es igual a 20 vacas, tal como lo especifica el enunciado del problema.

2) Un taller produce volantines de colores azul, verde y blanco. Los costos de producción (en pesos [$]) son 10 [$], 15 [$] y 30 [$] y los precios de venta son 20 [$], 23 [$] y 50 [$] respectivamente. Se debe cumplir que por cada 15 volantines verdes se deben producir al menos 4 volantines azules. Además, por cada volantín blanco se debe producir al menos un volantín azul. La producción de volantines blancos no debe exceder la suma de volantines verdes y azules.

   Solución

   Definimos las variables de decisión:

   a número de volantines azules a producir;
   v número de volantines verdes a producir;
   b número de volantines blancos a producir.

   Maximizar $z = 10\,a + 8\,v + 20\,b$
   sujeto a: $4\,v - 15\,a \leq 0;$
   $a - b \geq 0;$

$v + a - b \geq 0;$
$v, a, b \geq 0.$

La condición "por cada 15 volantines verdes se deben producir al menos 4 azules" se traduce en "$4\,v - 15\,a \leq 0$", pues si $v = 15$ y $a = 4$ entonces la restricción se convierte en igualdad, si $v = 16$ y $a = 4$ se viola tanto la condición como la restricción, en tanto si $v = 14$ y $a = 4$ se respeta la condición y la restricción.

3) El *problema de la dieta* o de *satisfacción de receta* busca la combinación de recursos que satisfacen de la forma más eficiente un conjunto de requerimientos. Supongamos que un restaurante ofrece tres tipos de menú: J, K y L. Cada menú tiene distinto costo y cantidad de canapés, pasteles, jugos y bebidas. Se desea entregar el servicio más barato que cumpla con las exigencias de la Tabla 1.6

Tabla 1.6: Exigencias de menús

	Menú J	**Menú K**	**Menú L**	**Cantidad mínima requerida**
Canapés	10	5	15	500
Pasteles	5	3	5	350
Jugos	2	1	-	100
Bebidas	-	1	2	120
Costo	500	200	800	

Para resolver este problema definimos las variables de decisión:

j cantidad de menú J a comprar;
k cantidad de menú K a comprar;
l cantidad de menú L a comprar.

Minimizar $z = 500\,j + 200\,k + 800\,l$
sujeto a: $10\,j + 5\,k + 15\,l \geq 500;$
$5\,j + 3\,k + 5\,l \geq 350;$
$2\,j + k \geq 100;$
$k + 2\,l \geq 120;$
$j, k, l \geq 0.$

4) Una operación minera consta de dos yacimientos: Regimiento e Isla. Cada uno de ellos es capaz de producir en cada jornada [j] de trabajo concentrado de cobre, molibdeno (toneladas [t]) y sulfuros[18] (litros [l]) en las cantidades mostradas en la Tabla 1.7.

[18] Con el azufre que está presente en el mineral se produce ácido sulfúrico.

Tabla 1.7: Producción de yacimientos

	Regimiento	**Isla**
Cobre [t/j]	6.000	2.000
Molibdeno [t/j]	200	200
Sulfuros [l/j]	100	500

Ambos yacimientos abastecen una fundición, cuyos requerimientos semanales son al menos 12.000 [t] de cobre, 800 [t] de molibdeno y 1.000 [l] de sulfuros. El costo de operar el yacimiento Regimiento es 100.000 [$/j] y para el yacimiento Isla es 80.000 [$/j]. Suponiendo que se debe minimizar el costo de producción, calcule cuántas jornadas por semana [j/s] debe operar cada yacimiento para satisfacer los requerimientos de la fundición. Señale cuál es el costo de operación.

Solución

La estructura del problema corresponde al problema de satisfacción de receta. Definimos las variables:

r jornadas semanales de operación del yacimiento Regimiento;
i jornadas semanales de operación del yacimiento Isla.

Minimizar $z = 100.000\, r + 80.000\, i$
sujeto a:

$6.000\, r + 2.000\, i \geq 12.000$ Cobre;
$200\, r + 200\, i \geq 800$ Molibdeno;
$100\, r + 500\, i \geq 1.000$ Sulfuros;
$r, i \geq 0$.

La Ilustración 1.25 muestra que el resultado óptimo es $r = 1$ [j/s] e $i = 3$ [j/s], lo cual se traduce en un costo de: $100.000 \cdot 1 + 80.000 \cdot 3 = 340.000$ [$].

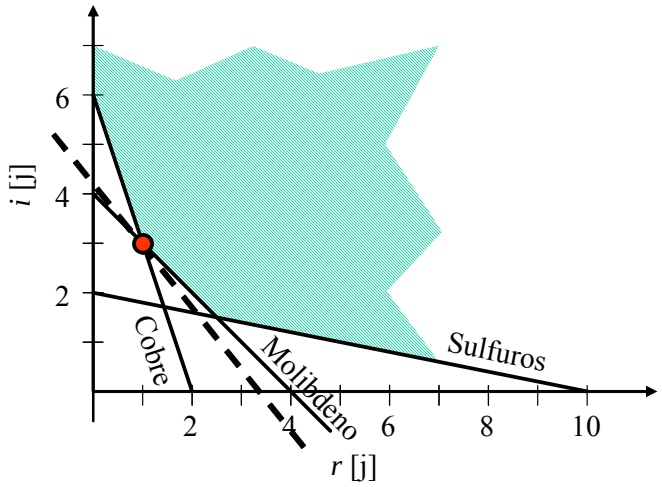


Ilustración 1.25: Resolución gráfica del problema de programación de una mina

5) El dueño de un predio frutícola que produce uva de mesa por la que recibe 300 pesos por kilogramo [$/kg], debe decidir la cantidad de fertilizante que va a comprar de manera de obtener la mayor producción posible. En el mercado existen dos tipos de

fertilizantes A y B, los cuales difieren en su costo y en la proporción de minerales que lo componen, tal como se muestra en la Tabla 1.8. Por ejemplo, cada kg de A contiene 640 gramos [gr] de nitrógeno (N), 50 [gr] de fósforo (P) y 310 [gr] de potasio (K). El rendimiento de uva de mesa por cada kg de fertilizante es 30 kilogramos por hectárea [kg/ha] utilizando fertilizante A y 20 [kg/ha] en caso de usar fertilizante B.

Tabla 1.8: Concentración de minerales

	Nitrógeno	**Fósforo**	**Potasio**	**Costo [$/kg]**
Fertilizante A	64%	5%	31%	310
Fertilizante B	25%	65%	10%	260

Los minerales deben estar balanceados en la tierra, así es que por cada 1 [kg] de P que se aplica no puede aplicarse más de 3 [kg] de N. Cuando se usan los dos fertilizantes debe cumplirse que por cada 1 [kg] de fertilizante B debe haber al menos 2 [kg] de fertilizante A.

Estudios de suelo indican que su pH (grado de acidez) es 7. Como la uva de mesa es una especie sensible a la acidez, el suelo no puede tener un pH menor de 5. Por cada 1 [kg] de N aplicado por hectárea, el pH baja en 0,005 unidades y por cada 1 [kg] de P el pH sube en 0,003.

Modele el programa lineal que maximiza las utilidades del predio.

<u>Solución:</u>

Variables de decisión:

a [kg] cantidad de fertilizante A que se compra;
b [kg] cantidad de fertilizante B que se compra.

Variables auxiliares:

N [kg] kilogramos de Nitrógeno;
P [kg] kilogramos de Fósforo;
K [kg] kilogramos de Potasio.

Maximizar $z = 300\,(30\,a + 20\,b) - (310\,a + 260\,b)$
sujeto a:

$0{,}003\,\mathrm{P} - 0{,}005\,\mathrm{N} \geq -2 \rightarrow$
$0{,}003\,(0{,}05\,a + 0{,}65\,b) - 0{,}005\,(0{,}64\,a + 0{,}25\,b) \geq -2$ Restricción pH;
$3\,\mathrm{P} \geq \mathrm{N} \rightarrow 3\,(0{,}05\,a + 0{,}65\,b) \geq (0{,}64\,a + 0{,}25\,b)$ Minerales;
$a \geq 2\,b$ Proporción fertilizante;
$a, b \geq 0$.

6) Las preguntas a continuación solicitan mostrar cómo se expresan ciertas condiciones de un problema mediante expresiones lineales.

a) Muestre cómo expresar la restricción $|x - y| \leq \mathrm{C}$.

b) Muestre cómo maximizar el mínimo de las variables r, s, y t.

c) Muestre cómo minimizar el máximo de las variables r, s, y t.

d) Muestre cómo expresar la minimización del valor absoluto de una variable. Para ello exprese el valor absoluto $|x|$ de la variable x como una combinación de dos variables, una ecuación y dos restricciones de no-negatividad.

Solución:

a) Reemplazamos $|x - y| \leq C$ por las restricciones lineales $x - y \leq C$; $y - x \leq C$.

Cabe señalar que un programa lineal no puede definir $|x - y| \geq C$, pues ello implica hacer no-convexo el espacio factible.

b) Definimos la variable m a maximizar y agregamos las siguientes restricciones:

$$m \leq r;\ m \leq s;\ m \leq t.$$

c) Definimos la variable M a minimizar y agregamos las siguientes restricciones:

$$M \geq r;\ m \geq s;\ m \geq t.$$

Cabe señalar que un programa lineal no puede maximizar el máximo ni minimizar el mínimo de un conjunto de variables.

d) Definimos x_p como la parte positiva de x y x_n como la parte negativa de x, donde sólo x_p ó x_n pueden ser positivos. Por ejemplo, si definimos $x = 3$ entonces $x_p = 3$ y $x_n = 0$, y si $x = -5$ entonces $x_p = 0$ y $x_n = 5$. Supongamos que deseamos resolver:

Minimizar $z = |x|$; Sujeto a: ...

Podemos adaptar este problema a:

Minimizar $z = x_p + x_n$; Sujeto a: ..., $x_p - x_n = x$; $x_p \geq 0$; $x_n \geq 0$.

Cabe señalar que la maximización del valor absoluto de una variable no es una función objetivo lineal.

7) Un alumno universitario dispone de 800 puntos para utilizar en la inscripción de los ramos mínimos A y B, y de los ramos optativos C y D. Los ramos A y C son de Economía y los ramos B y D son de Administración. La probabilidad de ser aceptado en un ramo es lineal respecto del número de puntos apostados: probabilidad = 0 si se asignan cero puntos y probabilidad = 1 si se asignan 500 puntos en el caso de los ramos mínimos y 300 puntos en el caso de los ramos optativos. El ramo B demanda 10 horas semanales de estudio, un tercio de lo que requiere el ramo A y el doble de lo que requiere el ramo C, en tanto el ramo D requiere un sexto de lo que demanda el ramo A. La asignación de puntos debe respetar las siguientes condiciones:

- El valor absoluto de la diferencia entre el puntaje asignado a los ramos económicos y el puntaje asignado a los ramos administrativos no puede superar el 25% del total de puntaje asignado.
- El puntaje asignado a los ramos mínimos debe al menos duplicar al puntaje asignado a los ramos optativos.
- La probabilidad de ser aceptado en un ramo mínimo no puede ser inferior a 20%.

- Por cada punto asignado al ramo D la Escuela subsidia en medio punto la disponibilidad de puntos del alumno, aunque el total de puntos asignados al ramo D no pueda superar 300.
- El valor esperado de horas semanales de estudio no debe ser superior a 60.

Plantee el programa lineal que asigna de manera óptima los puntos, considerando que el alumno valora ser aceptado en un ramo mínimo el doble que ser aceptado en un ramo optativo.

Solución:

Maximizar $2\,a/500 + 2\,b/500 + c/300 + d/300$
sujeto a:

$a \leq 500;\ b \leq 500;\ c \leq 300;\ d \leq 300$	Probabilidad ≤ 1;
$a + c - (b + d) \leq 1/4\ (a + b + c + d)$	Valor absoluto de la diferencia;
$a + c - (b + d) \geq -1/4\ (a + b + c + d))$	
$a + b \geq 2\ (c + d)$	Puntaje mínimo duplica;
$a \geq 100$	Probabilidad ramo mínimo;
$b \geq 100$	
$a + b + c + d \leq 800 + 0{,}5\ d$	Subsidio;
$d \leq 300$	
$30/500\ a + 10/500\ b + 5/300\ c + 5/300\ d \leq 60$	Horas de estudio;
$a, b, c, d \geq 0.$	

8) Un productor frutícola requiere de trabajadores para cosechar y empacar su producción. También necesita cajas para empacar la fruta. Cuenta con 30 personas que disponen de 25 horas semanales [h/s] cada una para realizar el trabajo de cosecha y otras 30 [h/s] cada una para realizar el trabajo de empaque. Cada caja de peras, manzanas y uvas de mesa las vende a 3.000 [$], 2.500 [$] y 4.000 [$] respectivamente. El costo directo de una caja es 150 [$], y cuenta con un presupuesto de 87.000 [$/s] para dicho insumo. Además cuenta con la información de la Tabla 1.9.

Tabla 1.9: Información de la producción

	Cosecha [minutos/kg]	Packing [cajas/h]	Capacidad caja [kg/caja]
Peras	4	20	25
Manzanas	2	10	20
Uvas	5	5	10

No hay restricción en la demanda de manzanas ni uvas, pero a lo más se venderán 100 cajas de peras. Plantee el problema lineal que maximiza la utilidad, considerando las siguientes variables de decisión:

p	kilogramos de peras a vender;
m	minutos dedicados a cosechar manzanas;
u	porcentaje del presupuesto de las cajas destinados a uvas.

Solución:

Maximizar

$z = 3000 \cdot 0{,}04\, p + 2500 \cdot 0{,}025\, m + 4000 \cdot 580\, u - 150(0{,}04\, p + 0{,}025\, m + 580\, u)$

sujeto a:

$4 \cdot 25 \cdot 0{,}04\, p + 2 \cdot 20 \cdot 0{,}025\, m + 5 \cdot 10 \cdot 580\, u \leq 45.000$	Tiempo cosecha;
$0{,}05 \cdot 0{,}04\, p + 0{,}1 \cdot 0{,}025\, m + 0{,}2 \cdot 580\, u \leq 900$	Tiempo de packing;
$0{,}04\, p + 0{,}025\, m + 580\, u \leq 580$	Presupuesto;
$p \leq 2500$	Máxima demanda peras;
$p, m, u \geq 0.$	

9) La Ilustración 1.26 muestra el proceso simplificado de una siderúrgica (empresa que produce acero). Primero el horno funde el mineral de hierro junto a otros insumos para producir "arrabio" o acero líquido. Luego la laminadora produce planchas y barras de acero. También produce chatarra en diferentes cantidades dependiendo de la combinación de planchas o barras que se produzcan, la cual debe ser continuamente retroalimentada al horno para controlar su temperatura.

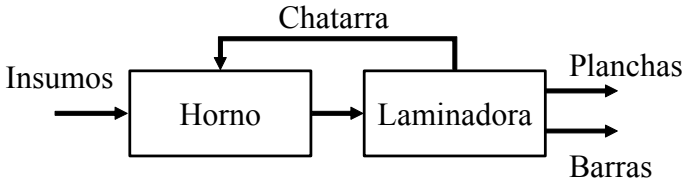


Ilustración 1.26: Proceso simplificado de siderúrgica

Por compromisos comerciales, la producción de planchas debe ser como mínimo de 10 toneladas por semana [t/s] y como máximo 90 [t/s]. La producción máxima de barras es 60 [t/s]. Por el requerimiento de chatarra del horno, la producción de planchas más dos veces la producción de barras debe ser como mínimo 80 [t/s]. La laminadora trabaja como máximo 160 horas por semana [h/s]. El tiempo unitario de laminación de planchas y de barras es 2 [h/t]. La utilidad neta de las planchas y de las barras es 5 [$/t] y 3 [$/t] respectivamente.

a) Plantee el programa lineal que maximiza la utilidad neta total de la siderúrgica y resuelva gráficamente el problema.

b) ¿Qué ocurre si la utilidad neta de las planchas cae a 1 [$/t]?

c) Volviendo a la situación original, ¿cuál es la capacidad mínima de la laminadora que permite operar a la planta?

d) Volviendo a la situación original, ¿cuánto estaría dispuesto a pagar por 20 [h/s] extra de la laminadora? ¿Y por otras 20 [h/s] de capacidad adicional?

e) Volviendo a la situación original, ¿hasta cuánto sería conveniente disminuir el tiempo unitario de laminación de planchas? ¿Hasta cuánto sería conveniente disminuir el tiempo unitario de laminación de barras?

Solución:

a) Variables de decisión

z utilidad de la siderúrgica;
p toneladas de planchas producidas semanales;
b toneladas de barras producidas semanales.

Maximizar $z = 5\,p + 3\,b$

sujeto a:	$p \leq 90$	Producción máxima planchas;
	$p \geq 10$	Producción mínima planchas;
	$b \leq 60$	Producción máxima barras;
	$2\,p + 2\,b \leq 160$	Capacidad laminadora;
	$p + 2\,b \geq 80$	Producción horno;
	$p, b \geq 0$.	

La Ilustración 1.27 muestra la representación gráfica del problema. Las cantidades producidas en el punto óptimo son: $p = 80$ planchas; $b = 0$ barras. La utilidad es $z = 400$ [\$/s].

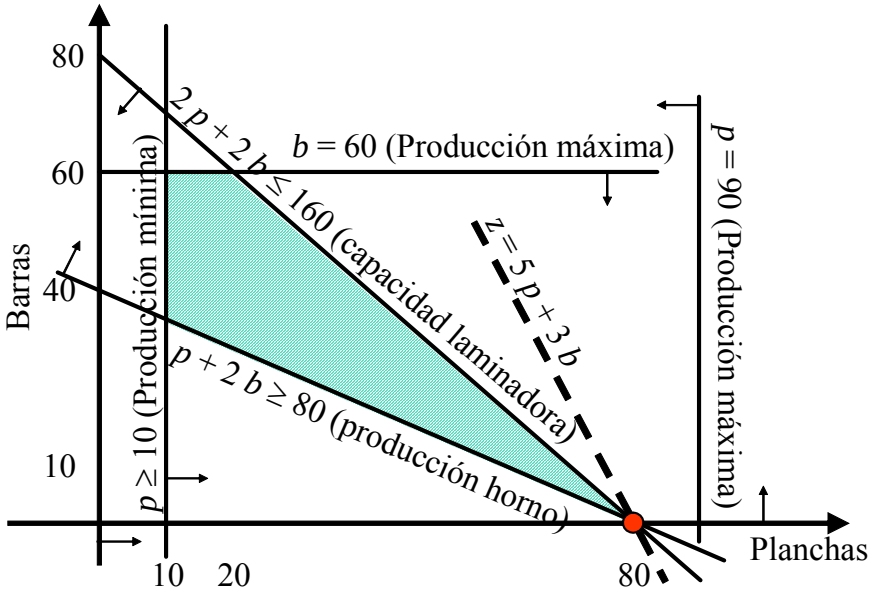


Ilustración 1.27: Producción de empresa siderúrgica.

b) Si la utilidad neta de las planchas cae a 1 [\$/t], la pendiente de la función objetivo se hace menos negativa (más horizontal) con lo cual el nuevo óptimo es el punto de intersección de las restricciones de capacidad de la laminadora y producción máxima de barras. Es decir, se producen $p = 20$ planchas y $b = 60$ barras con una utilidad neta $z = 200$ [\$/s].

c) La capacidad mínima es aquella que permite que exista área factible, en este caso el punto (10, 35). Para producir 10 planchas y 35 barras se necesitan 2 [h/t] · 10 [t/s] + 2 [h/t] · 35 [t/s] = 90 [h/s].

d) Con 20 [h] extra de capacidad de la laminadora, la producción óptima sería $p = 90$ planchas y $b = 0$ barras, con una utilidad $z = 5$ [\$/t] · 90 [t/s] = 450 [\$/s] en lugar de 400 [\$/s]. Por lo tanto, lo máximo a pagar es 450 [\$/s] – 400 [\$/s] = 50 [\$/s].

Con otras 20 [h] adicionales no se puede aumentar la producción de planchas, pues ya se está en el máximo, pero se pueden producir 10 [t/s] de barras, con lo que la producción sería de p = 90 planchas y b = 10 barras, lo cual reportaría una utilidad z = 480 [$/s] versus 450 [$/s] de las primeras 20 [h] adicionales. Por lo tanto, la utilidad de las segundas 20 [h] adicionales es 480 [$/s] – 450 [$/s] = 30 [$/s].

e) Es conveniente reducir el tiempo de laminación de planchas hasta que la capacidad de la laminadora no sea restrictiva. Ello sucede cuando la producción es p = 90 planchas y b = 60 barras. Para producir 60 barras se utilizan 120 [h] de la laminadora, lo que deja una disponibilidad de 160 [h] – 120 [h] = 40 [h] para la laminación de 90 planchas. Luego, el tiempo de laminación de planchas debe reducirse a 4/9 [h].

   El tiempo de laminación de las barras es conveniente reducirlo hasta cero pues con ello la restricción de la laminadora es la recta vertical p = 80 planchas, con una producción óptima de p = 80 planchas y b = 60 barras. No es beneficiosa cualquier reducción en el tiempo de laminación de las barras, pues al principio no se producen barras. La reducción será beneficiosa desde momento en que la pendiente de la restricción de la capacidad de la laminadora sea igual a la pendiente de la función objetivo y, hasta que la restricción de la capacidad de la laminadora sea vertical, lo que sucede cuando el tiempo de laminación de las barras es cero.

10) En un país que va a elegir su próximo presidente hay dos partidos políticos principales: Azul y Amarillo. El partido Azul valora tres veces más el gasto social que la inversión. El partido Amarillo valora dos veces más la inversión que el gasto social. El presupuesto del país es 100.000.000 de pesos [$]. Suponga que para conservar los equilibrios de largo plazo, no se puede gastar más del 70% del presupuesto en gasto social ni más del 50% en inversión. El gobierno actual es del partido Azul, cuyo presidente promulgó una *ley social* que obliga a que por cada 1 [$] destinado a inversión, se gaste al menos 1,5 [$] en materia social.

a) Modele el problema y encuentre gráficamente la solución óptima para cada uno de los partidos.

b) Un parlamentario del partido Azul comenta: “Es buena la ley social, porque asegura que en tanto seamos gobierno vamos a tener fondos suficientes para el gasto social” ¿Es correcto este comentario?

c) Un camarada le contesta: “Nosotros siempre optaremos por el gasto social; la iniciativa del presidente fue inútil” ¿Es correcta esta réplica?

d) El candidato Amarillo promete que para aumentar la inversión, hará que el máximo de ambos tipos de gastos corresponda a 70% del presupuesto. ¿De qué sirve esta acción?

e) Suponga que aparece un candidato de un partido de Centro, que valora igualmente la inversión y el gasto social, por lo que quiere eliminar la ley social y repartir el presupuesto equitativamente, pues de esa manera maximiza su utilidad política. ¿Vale la pena que elimine la ley social?

f) Suponga que el partido Azul se radicaliza y ahora valora cuatro veces más el gasto social que la inversión. Los opositores a este cambio piensan que la iniciativa no

sirve para nada, argumentando que la radicalización no cambia la decisión de presupuesto. ¿Es correcta esta aseveración?

g) Suponga que en el país votan 900.000 ciudadanos. De ellos 10.000 tienen una función de utilidad que sólo valora la inversión, así es que la pendiente de la recta es vertical de 360°; otros 10.000 ciudadanos tienen una función de utilidad con pendiente negativa de 359°; otros 10.000 tienen pendiente de 358° y así sucesivamente, hasta otros 10.000 que tienen una pendiente horizontal de 270°, así es que sólo valoran el gasto social. ¿Quién ganará las próximas elecciones si el candidato de Centro no se presenta?

Solución:

a) Variables:

g	gasto social;
i	inversión.

Función objetivo:

$z = i + 3\,g$	Función objetivo partido Azul;
$z = 2\,i + g$	Función objetivo partido Amarillo.

Restricciones:

$g + i \leq 100.000.000$	Restricción presupuestaria;
$g \leq 70.000.000$	Restricción de gasto social;
$i \leq 50.000.000$	Restricción de inversión;
$1{,}5\,i \leq g$	Restricción ley social;
$g, i \geq 0$.	

La Ilustración 1.28 presenta gráficamente el problema.

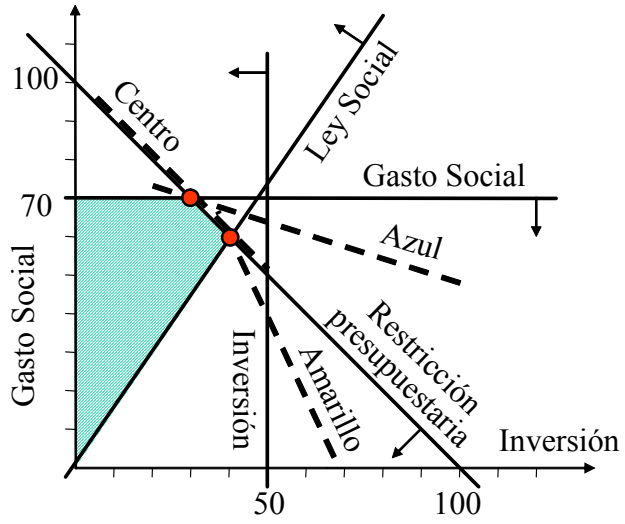


Ilustración 1.28: Gasto social e inversión

Partido Azul: g = 70.000.000 [$], i = 30.000.000 [$], z = 240.000.000 [$].

Partido Amarillo: g = 60.000.000 [$], i = 40.000.000 [$], z = 140.000.000 [$].

b) Para el gobierno la ley social no es una restricción activa, por lo que no tiene efecto cuando gobierna.

c) La iniciativa no fue inútil. Lo que pretendía el Presidente es asegurar que cuando gobierne el partido Amarillo haya más gasto social del que habría sin la ley.

d) Aumentar la inversión máxima no tiene efectos, porque no es una restricción activa.

e) Si bien la ley social puede ser una restricción activa para él, eliminarla no mejora su utilidad (no cambia el valor de z).

f) No cambia el punto óptimo. Tampoco es claro que aumente la utilidad, pues lo único que se está definiendo es la relación entre la valorización del gasto social y la inversión. Si por el contrario se dijese que aumenta en términos absolutos la valoración del gasto social, sí crecería la utilidad pues aumenta el valor de la función objetivo.

g) Los 900 mil habitantes votarán por el candidato cuya función objetivo se asemeje más a la propia. Hay tres candidatos y el área factible hace que la repartición de votantes sea mayor para los candidatos de los partidos Amarillo y Azul, y menor para el candidato del partido de Centro. Cada candidato Amarillo y Azul recibe el mismo número de votos.

11) Una empresa cuenta con excedentes de caja de 11.000 dólares [US$] hoy (período cero) y contará con 6.000 [US$] el próximo período (período uno). Si los excedentes no son utilizados en sus respectivos períodos se reparten como utilidad, por lo que no es posible acumularlos. Para aprovechar estos fondos, la empresa puede realizar dos proyectos los que demandan los flujos de caja y las horas de dedicación indicados en la Tabla 1.10. Por ejemplo, el proyecto A demanda 10.000 [US$] y 8 horas [h] de trabajo el período cero. La empresa dispone de 14 [h] de trabajo por período para ocupar en estos proyectos.

Tabla 1.10: Flujos de caja en [US$] y horas de dedicación por proyecto

Período	**0**	**1**	**2**	**3**	**VPN**
Flujos de Caja					
Proyecto A	-10.000	8.000	16.000	0	9.000
Proyecto B	0	-10.000	8.000	14.000	7.500
Horas de dedicación					
Horas en A	8	5	0	0	
Horas en B		12	0	2	

Con el objetivo de maximizar sus excedentes la empresa puede participar en cada proyecto en el porcentaje que desee, bajo la condición de que por cada 1 [US$] invertido en B debe invertir al menos 2 [US$] en A.

a) Modele el problema de planificación de las finanzas de la empresa.

b) Grafique el problema y encuentre la solución óptima.

c) Suponga que el remanente de la inversión se puede invertir a una tasa de 10% por período. ¿Cómo cambia su respuesta en (a)?

Solución

a) Variables de decisión

x_A porcentaje participación en proyecto A;
x_B porcentaje participación en proyecto B.

Maximizar	$z = 9.000\ x_A + 7.500\ x_B$	
sujeto a:	$x_A \leq 1$	Máxima participación en A;
	$x_B \leq 1$	Máxima participación en B;
	$10.000\ x_A \leq 11.000$	Flujos período 0;
	$10.000\ x_B \leq 6.000 + 8.000\ x_A$	Flujos período 1;
	$8\ x_A \leq 14$	Horas período 0;
	$5\ x_A + 12\ x_B \leq 14$	Horas período 1;
	$2\ x_B \leq 14$	Horas período 3;
	$2 \cdot 10.000\ x_B \leq 10.000\ x_A$	Condición de inversión;
	$x_A, x_B \geq 0.$	

b) Este problema puede graficarse mediante la Ilustración 1.29, cuya solución óptima es x_A = 100%, x_B = 50%, con un VPN igual a 12.750 [US$].

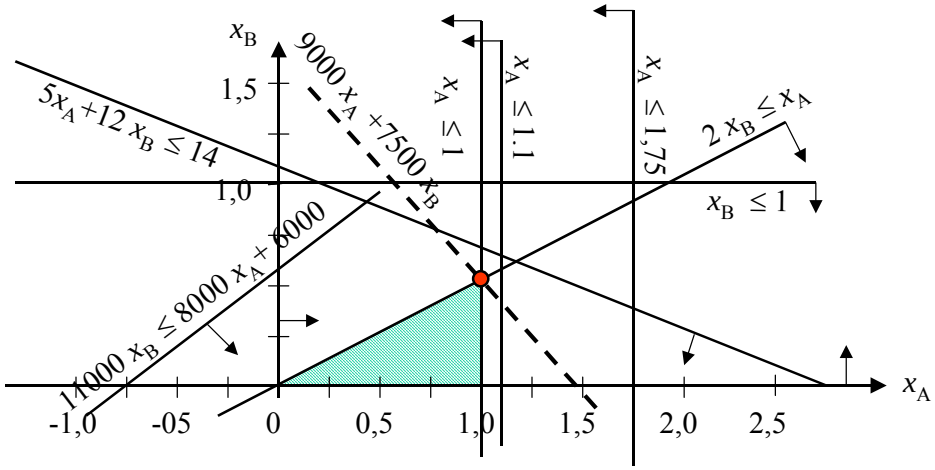


Ilustración 1.29: Representación gráfica de inversiones en proyecto A y proyecto B

c) Las restricciones que cambian son:

$$10.000\ x_A + s_1 = 11.000$$

$$10.000\ x_B + s_2 = 6.000 + 8.000\ x_A + 1{,}1\ s_1.$$

La función objetivo a maximizar:

$$z = 9.000\ x_A + 7.500\ x_B + (1{,}1)^2\ s_2 / (1 + i)^2$$

El parámetro i es la tasa de descuento del problema. Esto es, a la función objetivo original, que sólo puede generar VPN invirtiendo en los proyectos, se le agrega la posibilidad de invertir a una tasa de 10%. El resultado de la inversión se trae a valor presente dividiendo por $(1 + i)^2$.

12) Una empresa está evaluando la posibilidad de modificar el horario de trabajo de sus empleados. Actualmente trabajan de lunes a viernes 45 horas semanales [h/s] repartidas equitativamente. El proyecto en evaluación contempla aumentar las horas trabajadas de

lunes a miércoles y reducir la jornada los días jueves y viernes, porque los empleados son 20% más productivos al principio que al final de la semana. La jornada no puede exceder las 45 [h/s] y no se puede trabajar más de 12 horas diarias [h/d].

La empresa cuenta con un presupuesto semanal para gastos generales (teléfono, materiales, servicios básicos) de $180.000 pesos [$] que están asociados a las horas de trabajo, y varían según el día de la semana. La Tabla 1.11 muestra los gastos por hora trabajada según el día de la semana.

Tabla 1.11: Gastos de la empresa por hora trabajada

Día	Gastos generales por hora [$/h]
Lunes	4.000
Martes	4.000
Miércoles	4.000
Jueves	3.000
Viernes	3.000

a) Suponiendo que se desea maximizar la productividad de su recurso humano, plantee y grafique el programa lineal.

b) ¿Cuál sería el beneficio para la empresa de contar con un presupuesto 10% superior para gastos generales?

c) Suponga que se reduce el presupuesto de gastos generales a 162.000 [$/s]. ¿Cómo cambiaría su respuesta en (a)?

d) Los empleados reciben un salario de 2.000 [$/h] cada día de la semana. Hacia el fin de semana están cansados, así es que toda actividad laboral de jueves y viernes tiene un costo personal de 1.000 [$/h]. Si la empresa buscase maximizar el bienestar de sus empleados, y su presupuesto de gastos generales fuera de 162.000 [$/s], ¿cuál sería el horario óptimo? ¿cuál sería el beneficio para los trabajadores?

e) Según lo establecido en (d), ¿cuánto tendría que pagar la empresa a sus empleados por hora los jueves y viernes para que ellos estuvieran de acuerdo con la solución que maximiza la productividad de la empresa? En otras palabras, estamos buscando la solución que simultáneamente más conviene tanto a la empresa como a sus trabajadores.

f) ¿Qué pasaría si la empresa cambiara los horarios y se trabajara una mayor cantidad de horas los jueves y viernes que los lunes, martes y miércoles? ¿Cómo cambiaría la respuesta en (a)? ¿A quién favorecería esta medida?

<u>Solución</u>

a) El problema se puede modelar con sólo dos variables, pues la información de los días lunes, martes y miércoles es idéntica, y la de los días jueves y viernes también lo es. Podemos definir las variables de dos maneras:

- Alternativa 1:
  - x horas diarias trabajadas lunes, martes y miércoles;
  - y horas diarias trabajadas jueves y viernes.

- Alternativa 2:
  - l horas totales trabajadas de lunes a miércoles ($x = l/3$);
  - j horas totales trabajadas jueves y viernes ($y = j/2$).

El modelo para las variables x e y es el siguiente.

Maximizar productividad $z = 1{,}2 \cdot 3\,x + 2\,y$
sujeto a:

$3\,x + 2\,y \leq 45$	Horas jornada semanal;	(i)
$x \leq 12$	Horas diarias;	(ii)
$y \leq 12$	Horas diarias;	(iii)
$12.000\,x + 6.000\,y \leq 180.000$	Restricción presupuestaria;	(iv)
$x \geq y$	Aumentar de lunes a miércoles;	(v)
$x \geq 0$;		(vi)
$y \geq 0$.		(vii)

La Ilustración 1.30 muestra la representación gráfica, cuyo óptimo es el punto (12; 4,5).

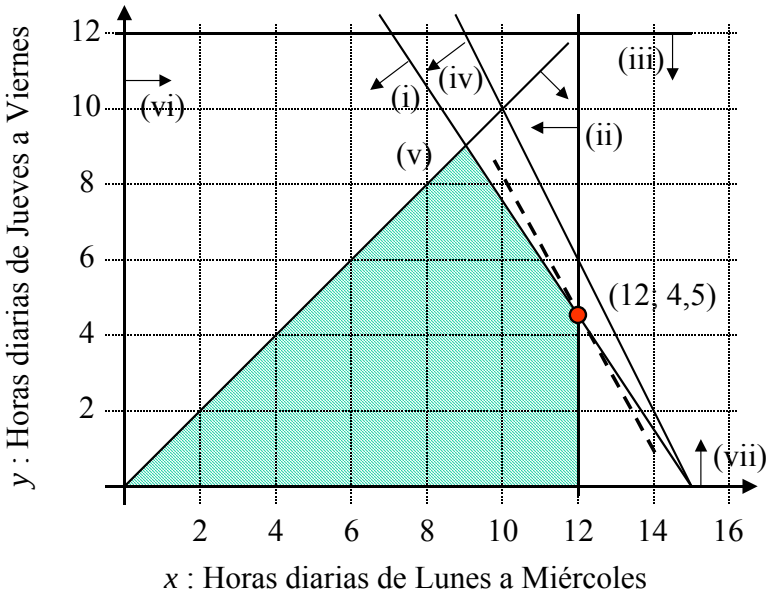


Ilustración 1.30: Horas diarias trabajadas en la empresa

b) Aumentar el presupuesto semanal de gastos generales no traería beneficios porque la restricción (iv) es redundante. En el punto óptimo sólo se están usando 171.000 [$] de los 180.000 [$] disponibles.

c) La restricción (iv) se contrae pues cambia a $12.000\,x + 6.000\,y \leq 162.000$. Ya no es posible alcanzar el punto óptimo encontrado en (a). El nuevo punto óptimo es (9, 9).

d) Se mantienen las restricciones y el área factible del caso (c). Maximizar el bienestar de los trabajadores implica maximizar $z = 2.000 \cdot 3\,x + 2.000 \cdot 2\,y - 1.000 \cdot 2\,y$, es decir, $z = 6.000\,x + 2.000\,y$. El nuevo punto óptimo es (12, 3). El beneficio para los trabajadores sería $6.000 · 12 + $2.000 · 3 = 78.000 [$].

e) De acuerdo con la Ilustración 1.31, el punto que maximiza la productividad es (9, 9). Si se cambia el salario por hora de los días jueves y viernes cambia la inclinación de la función objetivo de los empleados. La idea es hacerla menos empinada (con un salario de jueves y viernes mayor) hasta que coincida con la restricción presupuestaria. Esto se logra pagando un salario de 2.500 [$/h] los días jueves y viernes. La función objetivo sería $z = 2.000 \cdot 3\,x + 2.500 \cdot 2\,y - 1.000 \cdot 2\,y = 6.000\,x + 3.000\,y$, la que tiene pendiente igual a -2. Esto haría coincidir el óptimo en el punto (9,9) tanto para la empresa que maximiza la productividad como para los empleados. En resumen, sería mejor para todos trabajar jornadas laborales de 9 [h] todos los días, tal como se hace en la actualidad, en lugar de reducir las horas trabajadas los días jueves y viernes.

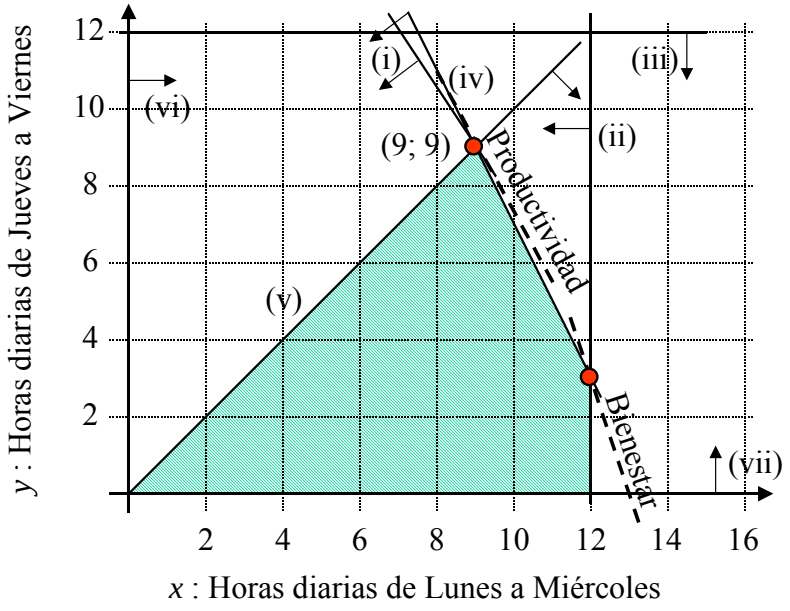


Ilustración 1.31: Productividad versus bienestar de trabajadores

f) En este caso cambia el sentido de la desigualdad en la restricción (iv), lo que provoca un cambio en el área factible. El punto óptimo encontrado en (c) sigue siendo alcanzable, pero ya no el punto óptimo de (a) o de (d). El óptimo en este caso sería el punto (9,9). Esta medida no favorecería a nadie. De acuerdo con la situación inicial, ni la empresa ni los empleados podrían alcanzar sus puntos óptimos.

13) Las empresas deben decidir cuánto invertir en recursos humanos (w) y cuánto en tecnología (t). Por ejemplo, un banco puede contratar y entrenar a cajeros o utilizar cajeros automáticos. Supongamos que la inversión en tecnología tiene como límite máximo cuadruplicar a la inversión en mano de obra, pues en caso contrario no hay empleados para operarla. El presupuesto permitiría destinar 40 millones de pesos [MM$] exclusivamente en tecnología, 20 [MM$] exclusivamente en mano de obra o cualquier combinación lineal entre ambas alternativas. El banco dispone de una cartera máxima potencial de 50 mil clientes [Mcl]. Cada millón de pesos invertido, tanto en mano de obra como en tecnología, es capaz de atender a 2 [Mcl]. La infraestructura disponible es de 4.500 metros cuadrados [m^2] de oficinas. Cada 1[MM$] invertido en mano de obra ocupa 100 [m^2] que corresponde a la mitad de lo que requiere cada

1[MM$] invertido en tecnología. Dados los servicios que ofrece el banco, invertir en mano de obra es 50% más rentable que hacerlo en tecnología.

a) Plantee el programa lineal que maximiza la rentabilidad del banco. Grafique y resuelva el problema.

Algunos países con problemas de cesantía han optado por reducir la productividad de la mano de obra con el objeto de forzar a los empresarios a contratar más personal. Por ejemplo, hace unos años Francia rebajó la jornada laboral a 35 horas semanales [h/s]. Suponga que el Estado adopta esta estrategia, por lo que ahora cada 1[MM$] invertido en mano de obra sólo puede atender a 1,5 [Mcl].

b) ¿Cuál es la nueva solución óptima? ¿Le conviene a la sociedad (baja la cesantía)? ¿Le conviene a la empresa?

c) ¿Qué pasa si en lugar de lo anterior, el personal se capacita y logra atender 2,5 [Mcl/MM$] invertido en mano de obra?

d) Suponga que cambian los precios relativos de los servicios que ofrece el banco, por lo que ahora destinar recursos a tecnología es 50% más rentable que hacerlo a mano de obra. ¿Cómo cambia el modelo y la solución óptima?

e) Suponga que cuando los precios relativos todavía no cambiaban, el banco decidió hacer cero la holgura de infraestructura por razones de eficiencia. ¿Cómo cambió la restricción? ¿Qué efecto tuvo esta medida en el punto óptimo y en la rentabilidad luego del cambio en los precios relativos (sin considerar el ingreso por la venta de infraestructura)?

Suponga que para combatir la cesantía el gobierno propone una reforma laboral que hace más rígido el despido, así es que w no puede bajar de 5 [MM$]. Como reacción los empresarios se auto-imponen una restricción a la contratación por lo que w no puede subir de 15 [MM$].

f) ¿Cómo cambian las soluciones óptimas respecto de las encontradas anteriormente? ¿En qué casos se perjudica a los trabajadores? ¿En qué caso se los beneficia?

<u>Solución</u>

a) Maximizar $z = 1{,}5\, w + 1\, t$
sujeto a:

$40\, w + 20\, t \leq 20 \cdot 40 = 800$	Presupuesto;
$2\, w + 2\, t \leq 50$	Cartera de clientes;
$100\, w + 200\, t \leq 4500$	Infraestructura;
$t - 4\, w \leq 0$	Operación tecnología;
$w, t \geq 0.$	

La representación gráfica se muestra en la Ilustración 1.32. El óptimo es $w = 15$ [MM$] y $t = 10$ [MM$], con $z = 3 \cdot 15 + 2 \cdot 10 = 65$ [MM$].

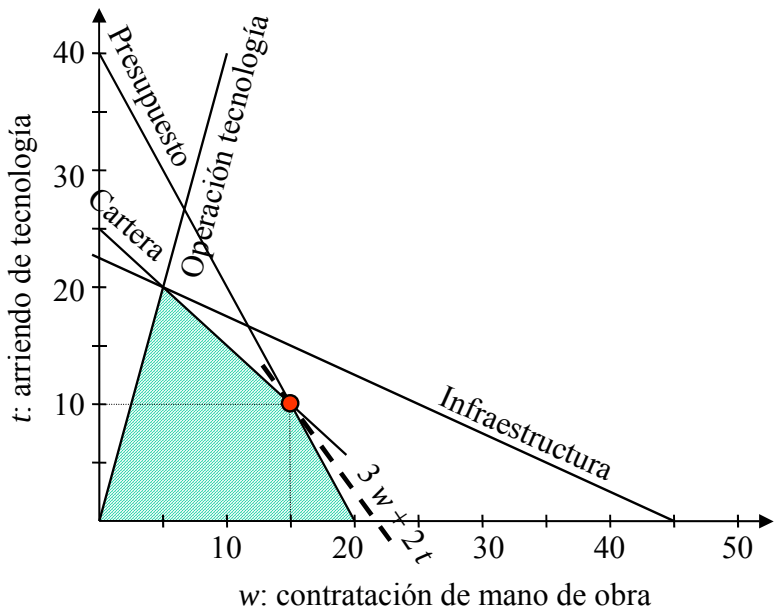


Ilustración 1.32: Representación de asignación de recursos de un banco

Resolver el problema maximizando $z = 1{,}5\ w + t$ entrega resultados análogos, porque la pendiente es la misma.

b) Se modifica la restricción de cartera de clientes a $1{,}5\ w + 2\ t \leq 50$, tal como lo muestra la Ilustración 1.33. La nueva inversión óptima es $w = 12$ y $t = 16$. Esto no le conviene a la sociedad pues w baja desde 15 a 12 personas, y por ello sube la cesantía. Le conviene a la empresa pues la nueva función objetivo es $z = 3 \cdot 12 + 2 \cdot 16 = 68$ [MM$].

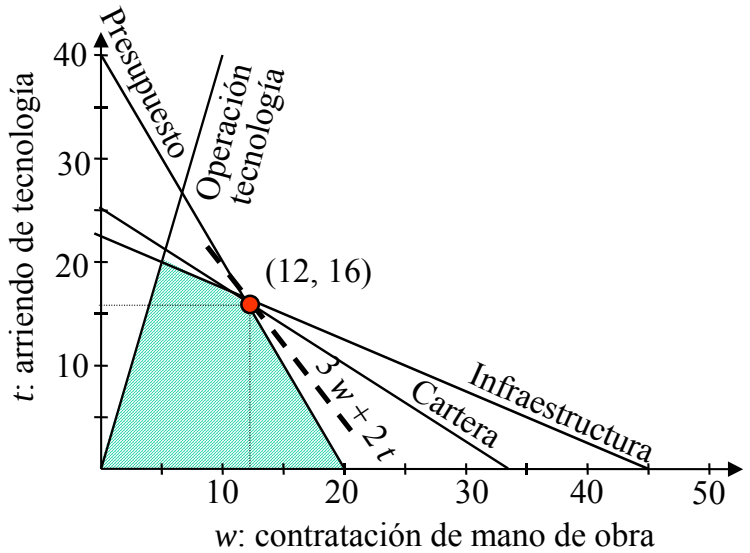


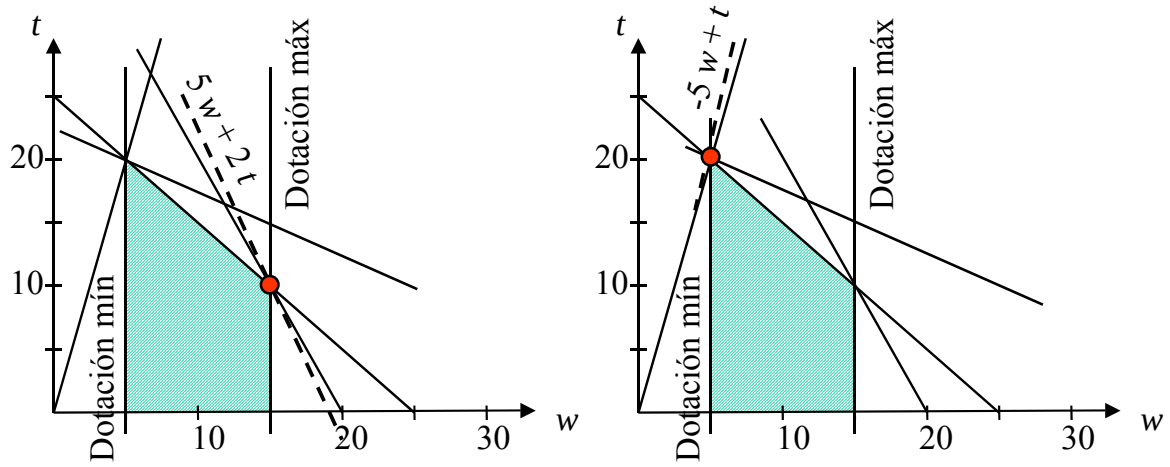
Ilustración 1.33: Cambio en productividad

c) Si el personal aumenta su productividad se llega a la máxima contratación: $w = 20$.

d) La nueva función objetivo es $z = 2\ w + 3\ t$. El óptimo cambia a $w = 5$ y $t = 20$ con $z = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 20 = 70$ [MM$]. La restricción de infraestructura es activa, pero también lo son las de operación tecnológica y de cartera de clientes, con lo que la restricción de infraestructura sigue siendo redundante y relajarla no es beneficioso.

e) La restricción de infraestructura cambia a $100\ w + 200\ t \leq 3.500$. Con lo nuevos precios relativos, el punto óptimo sigue siendo (15,10), con $z = 2 \cdot 15 + 3 \cdot 10 = 60$ [MM$]. La decisión de reducir la infraestructura fue inconveniente, pues el banco perdió flexibilidad para reaccionar frente a cambios en la función objetivo. La pérdida de rentabilidad es de (70 – 60) / 70 = 14%.

f) La reforma no cambia las soluciones encontradas anteriormente. Sí cambian las rentabilidades relativas de w y t, como lo muestra la Ilustración 1.34, entonces sí es posible que la reforma tenga efectos. Si la función objetivo es $z = 5\ w + 2\ t$, sin la reforma la empresa habría contratado más personal, hasta $w = 20$. Sin embargo, la nueva restricción lo impide, lo que limita la utilidad de la empresa y disminuye el empleo. Si la función objetivo es $z = -5\ w + t$, la empresa cerraría. Sin embargo, la restricción lo impide, lo que beneficia a los trabajadores empleados pero perjudica a los accionistas[19].



(a) Solución con $z = 5\ w + 2\ t$ (b) Solución con $z = -5\ w + t$

Ilustración 1.34: Reforma laboral y casos especiales

Ejercicios Propuestos

1) Se dispone de 8.000 [$] para invertir en los proyectos A y B de la Tabla 1.12. Para controlar el riesgo no se desea invertir más del 80% del capital en un solo proyecto.

[19] En algunos casos las empresas continúan operando no obstante pierden dinero, porque el costo de cerrar es demasiado alto.

Tabla 1.12: Inversión y VPN de dos negocios

	Inversión inicial	**VPN del negocio**
Proyecto A	\$5.000	\$5.500
Proyecto B	\$7.300	\$6.400

a) Modele y resuelva gráficamente el problema de planificación financiera con las variables:
   x_A porcentaje de participación en el proyecto A;
   x_B porcentaje de participación en el proyecto B.

b) Modele y resuelva gráficamente el problema con las variables:
   x_{WA} porcentaje del capital destinado al proyecto A;
   x_{WB} porcentaje del capital destinado al proyecto B.

c) Modele el problema con las variables:
   x_{CA} capital destinado al negocio A;
   x_{CB} capital destinado al negocio B.

2) Un entrenador de fútbol debe decidir la composición óptima de 10 jugadores de su equipo (sin considerar al arquero). El plantel cuenta con 8 atacantes (considerando delanteros y medio-campistas) y 13 defensas. La directiva del club le exige una táctica agresiva por lo que al menos debe poner un atacante por cada defensa. Cada defensa aporta un total de 0,3 goles al equipo, considerando los goles que convierte y los goles que evita. Cada atacante aporta 0,5 goles.

   a) Modele y resuelva gráficamente el problema, suponiendo que se quiere maximizar el número de goles.

   b) ¿Es conveniente que, comenzando el partido, un defensa ataje un "casi gol" con la mano, a sabiendas de que será expulsado?

   c) ¿Es conveniente contratar a un nuevo atacante estrella, si con ello el promedio de goles de los delanteros sube a 0,8? ¿Se necesita información adicional para responder esta pregunta?

   d) ¿Es razonable la restricción de táctica agresiva impuesta por la directiva del club?

   e) Suponga que el equipo debe enfrentar a un rival que tiene una muy buena defensa, por lo que el desempeño de los delanteros bajará a 0,2 goles. ¿Cuál es la composición óptima del equipo?

   f) Dado (e), ¿estaría dispuesto a contratar un nuevo delantero que tiene el mismo promedio de conversión que tiene su equipo?

3) Tras la aprobación de la fusión del "Banco Chileno" y el "Banco Eduardo", se debe decidir el número de sucursales que cada banco aportará al nuevo "Banco Fusión". Se deben cumplir las siguientes condiciones.

   - El número de sucursales del Banco Chileno debe tener como límite máximo cuadruplicar el número de sucursales del Banco Eduardo.

   - Por cada dos sucursales del Banco Chileno no debe haber más de cinco sucursales del Banco Eduardo.

- El Banco Fusión entre todas las sucursales, no necesita más de 22.800 metros cuadrados [m^2] de superficie.
- El Banco Fusión debe poder atender una cartera máxima de 300.000 clientes al mes [cl/mes] y una cartera mínima de 150.000 [cl/mes].
- El presupuesto para gastos administrativos para todas las sucursales es de 350 millones de pesos al mes [MM$/mes].
- Suponiendo que cada sucursal tiene el "mismo peso", la tasa de fidelidad promedio no debe ser menor que 85%.
- El número de ejecutivos de cuenta de las sucursales del Banco Chileno no puede superar el 80% del número de ejecutivos totales del Banco Fusión.

La Tabla 1.13 muestra los indicadores clave de desempeño de ambos bancos.

Tabla 1.13: Indicadores promedio de gestión de cada banco

Indicador	**Unidad**	**Banco Chileno**	**Banco Eduardo**	**Descripción**
Superficie promedio	m^2/suc	150	120	Superficie por sucursal
Nº ejecutivos de cuenta	ej/suc	10	6	Cantidad de ejecutivos de cuenta por sucursal
Capacidad de atención	cl/ej	250	200	N° de clientes que un ejecutivo de cuenta atiende al mes
Gastos administrativos	MM$/suc/ mes	2	1,75	Gastos administrativos mensuales por sucursal
Fidelidad ó lealtad	%/suc	80	90	Porcentaje de los clientes que permanecen más de un año.

Con estos antecedentes, responda las siguientes preguntas:

a) Dado que las sucursales del Banco Eduardo fueron destinadas para la división de clientes con altos ingresos, una sucursal del Banco Eduardo es en promedio un 20% más rentable que una sucursal del Banco Chileno. Plantee el programa lineal que maximiza la rentabilidad del Banco Fusión.

b) Resuelva gráficamente el problema. Para ello sólo grafique las restricciones de límite máximo de sucursales del Banco Eduardo, de superficie total de sucursales, de atención máxima y mínima de clientes y la restricción de fidelidad promedio (el resto de las restricciones son redundantes).

c) Suponga que la gerencia quiere reducir la superficie total de sucursales a 21.000 m^2. ¿Cuál es el beneficio o costo de esta medida?

d) La gerencia estima que si se relaja la restricción de atención mínima de clientes a 120.000 [cl/mes], el Banco Fusión podría operar con mayor flexibilidad. ¿Qué efecto tendría esta medida sobre la rentabilidad del Banco?

e) ¿Qué restricciones se hacen activas si las sucursales del Banco Chileno son 20% más rentable que las del Banco Eduardo? ¿Y si son 30% más rentables?

4) El Ministerio de Salud debe decidir cuánto gastar en la habilitación de consultorios (con su personal asociado) y la contratación de médicos independientes que atienden en sus propias consultas. El presupuesto anual es de 100.000 pesos [$]. Cada médico independiente cuesta 100 pesos anuales [$/año], en tanto que la habilitación de un consultorio cuesta 1.250 [$]. Por cada consultorio que se habilita se deben contratar al menos 5 médicos independientes. La disponibilidad de médicos independientes limita la contratación a no más de 500. Debe poder atenderse al menos 20.000 pacientes mensuales [pac/mes]. Cada consultorio es capaz de atender 250 [pac/mes] y cada médico puede atender a 50 [pac/mes]. Los pacientes están indiferentes entre ser atendidos en un consultorio o por un médico independiente. El beneficio social por peso gastado en la habilitación de un consultorio es el doble del beneficio logrado por la contratación de médicos.

a) Plantee el problema de programación lineal que maximiza el beneficio social.

b) Resuelva gráficamente el problema.

c) Si aumenta la disponibilidad de médicos y se puede contratar 50 médicos más, ¿cómo cambia su respuesta en (b)?

d) Independientemente de la función objetivo, ¿cuánto es el máximo número de pacientes que se pueden atender en el sector público?

e) ¿Cómo cambia su respuesta en (d) si por cada peso invertido en consultorios, el Estado aumenta el presupuesto del Ministerio de Salud en $0,5?

5) Una administradora de fondos de pensiones mide la calidad de servicio que le entrega a sus clientes en términos de dos atributos: calidad (c) y rapidez (r). Los clientes se clasifican en dos segmentos, adultos y adultos mayores, a quienes se les ofrecen planes de 15.000 pesos [$] y 10.000 [$] respectivamente. La demanda para los dos segmentos está en función de la calidad y la rapidez:

- Número de planes demandados por adultos: $100\,(c + 3\,r)$
- Número de planes demandados por adultos mayores: $100\,(2\,c + r)$

En las funciones de demanda, c representa los puntos obtenidos en calidad de la atención dentro de la industria y r los puntos obtenidos en rapidez de la atención. La escala de evaluación va de 0 a 30 puntos. Por cada medio punto obtenido en calidad de atención la empresa debe invertir 60.000 [$] en servicio al cliente y por cada punto obtenido en rapidez de atención, debe invertir 100.000 [$]. El presupuesto para mantener el servicio es 6.000.000 [$].

En la jefatura de servicio al cliente trabajan tres programadores y un especialista en recursos humanos. Cada uno trabaja 180 horas mensuales [h/mes], las que reparten en planes que mejoran uno u otro atributo de atención a clientes. Para obtener un punto en

calidad, un programador debe invertir 12 [h/mes]. Para un punto en rapidez invierte 9 [h/mes]. El especialista en recursos humanos debe invertir 3 [h/mes] para un punto en calidad y 6 [h/mes] para un punto en rapidez.

a) Plantee el programa lineal que maximiza los ingresos de la empresa.

b) Resuelva gráficamente.

c) ¿Qué pasa si el precio del plan para adultos es 10.000 [$]?

d) ¿Cuánto pagaría por aumentar el máximo de puntos de calidad a 60?

e) Suponga que gracias a un avance tecnológico, por cada punto obtenido en rapidez, la empresa sólo debe invertir 50.000 [$] en servicio al cliente. ¿Cómo cambia la respuesta en (b)?

f) ¿Cuánto estaría dispuesto a pagarle a un cuarto programador?

g) ¿Cuánto le pagaría a un especialista en recursos humanos adicional?

h) ¿Cómo cambian sus respuestas en (b) si el presupuesto de servicio al cliente es solamente 3.000.000 [$]?

i) Suponga que una ley a punto de promulgarse establece que será obligatorio tener igual cantidad de clientes adultos y adultos mayores. ¿Cómo cambia su respuesta en (b) en caso de promulgarse esta ley?

6) Una empresa publicitaria ha diseñado un afiche gigante que será pintado con tres colores: rojo, azul y amarillo. Se debe decidir la proporción en que utilizarán los colores de tal forma de captar la mayor atención de los transeúntes. Estudios de percepción visual señalan que:

- Para que haya armonía, la relación entre amarillo y rojo debe ser 2/3.
- Debe haber equilibrio entre los colores cálidos (amarillo y rojo) y fríos (azul), por lo que la diferencia de las cantidades ocupadas no debe ser superior a 5 litros [l].
- Cuando el afiche es incoloro, un 14% de los adultos que pasan frente a él lo notan. Se produce un incremento de 2% de dichos observadores por cada 1 [l] de pintura adicional cuando ésta es de color cálido y de 1% cuando es de color frío. En el caso de los jóvenes que pasan frente al afiche, un 25% lo nota cuando es incoloro. Se produce un incremento de 4% por 1[l] de pintura adicional de un color frío y de 1% cuando es un color cálido.
- Usar más de 15 [l] de pintura es un derroche, pues no provoca cambios en el observador potencial.

Suponiendo que de las personas que pasarán frente al afiche, el 80% son adultos y el 18% son jóvenes (el resto son niños, que no cuentan en este caso),

a) Plantee el programa lineal con tres variables de decisión

b) Resuelva gráficamente, convirtiendo el programa lineal a dos variables de decisión.

c) ¿Cómo cambia la respuesta si pasarán diariamente 50.000 personas frente al afiche?

7) La pareja Pérez Soto está planeando su matrimonio para 500 invitados. El novio valora a sus propios invitados en 8/7 de lo que valora a los invitados de su futura esposa. Ella valora los invitados del novio en la mitad de lo que los valora él, y 9/4 veces los invitados propios en relación con los del novio. Los novios invitarán a sus respectivas familias, donde los Pérez suman un total de 100 invitados y los Soto suman 70 invitados. El padre del novio, el Sr. Pérez, está dispuesto a pagar hasta por 320 invitados, el Sr. Soto dispone dinero para invitar a 350 invitados, y cada uno paga sus propios invitados. El Sr. Pérez no aceptará que sus invitados representen menos de una cuarta parte del total. El Sr. Soto exige que sus invitados sean al menos un tercio del total.

   a) Modele el problema que maximiza la utilidad de la pareja.

   b) Grafique y encuentre la solución óptima.

   c) Indique cómo cambia la solución del problema si el 20% de los invitados no asiste. Suponga que sólo se sabe la magnitud de la inasistencia, pero no la proporción que le corresponde a cada familia. Por ejemplo, puede ser que todos los invitados que no asistan estén relacionados a la familia Soto.

   d) Volviendo a la situación original, suponga que el novio tiene una fuerte discusión con su futuro suegro, por lo que su valoración de los invitados de la novia cae en 75%. ¿Cómo cambia la función de utilidad de la pareja y la solución óptima del problema?

   e) Volviendo a la situación original, suponga que el 50% de la familia Soto ha avisado que no podrá asistir. ¿Cómo cambia el problema y la solución óptima? ¿Es relevante el tamaño de la familia de la novia y del novio? ¿Qué pasaría si cada miembro de la familia Pérez confirma su asistencia avisando que llevará una pareja?

   f) Suponga que el presupuesto sólo permite 300 invitados, y se exige que al menos dos tercios de los invitados sean de la novia. ¿Cómo cambia el problema y la solución óptima?