Revista ABANTE, Vol. 5, Nº 1, pp. 3-29 (abril 2002)

UNA INTRODUCCION A LA TEORIA Y LA PRACTICA DE LAS SUBASTAS

MARCOS SINGER*

ABSTRACT

While auctions gain relevance as a trading mechanism, different events show how unskilled many firms and governments are when using them. The objective of this article is to familiarize the reader with the auction theory, either to improve the auction design, if he is the auctioneer, or to orient the bidding strategy, if he is the bidder. First, we present the simplest auctions, using intuitive mathematical tools. Then, we consider more realistic setups, such as the existence of risk aversion, and the use of reservation prices. We also study the case where the goods auctioned can be later traded on the market, and those auctions where bidders can benefit from economies of complementarities if they are granted with specific bundles of goods. In both cases, the auctioneer must recognize the risks and opportunities, in order to maximize the economic value of the allocation of goods.

Keywords: Auction, Winner's curse, Combinatorial auction.
JEL Classification: D44, Y20.

RESUMEN

Mientras las subastas ganan preponderancia como mecanismo de compraventa, diversos hechos muestran la impericia con la que muchas empresas y gobiernos las utilizan. El propósito de este artículo es familiarizar al lector con la teoría de las subastas, ya sea para mejorar su diseño en caso de ser el subastador, o para orientar su participación en caso de ser postor. En primer término presentamos las subastas más sencillas, utilizando para ello herramientas matemáticas intuitivas. Luego consideramos aspectos más realistas, tales como la aversión al riesgo y el uso de precios de reserva. A continuación estudiamos las subastas de bienes que pueden transarse posteriormente en el mercado y las subastas en que los postores pueden generar economías de complementación al adjudicarse ciertos paquetes de bienes. En ambos casos el subastador debe reconocer los riesgos y oportunidades, de manera de maximizar el valor económico de la asignación de los bienes.

* Profesor, Escuela de Administración, Pontificia Universidad Católica de Chile, singer@faceapuc.cl

Una compraventa puede realizarse por tres medios: en el mercado, mediante una negociación o por medio de una subasta. El mercado opera cuando hay muchos compradores y muchos vendedores. La negociación ocurre cuando sólo existen un comprador y un vendedor. La *subasta* se usa cuando un vendedor enfrenta muchos compradores potenciales, o un comprador enfrenta muchos vendedores potenciales. Si desea evitar negociar con cada uno de los compradores, el vendedor puede hacer valer su posición de monopolio para imponer las reglas que han de definir con quién se transará y a cuál precio. Las subastas están ganando importancia como mecanismo de transacción por diversos motivos. Primero, la expansión y la globalización de las economías hacen que cada vez haya más actores interesados en participar en la transacción de bienes y servicios. Segundo, la subasta suele ser considerada como un mecanismo más transparente que la negociación, pues las reglas del juego y las acciones de las partes están bien definidas. Por ello, muchos gobiernos están obligados a realizar todas sus adquisiciones, concesiones y enajenaciones relevantes a través de una subasta pública. Tercero, la negociación es más susceptible de prolongarse indefinidamente, por lo que cuando existe premura como, por ejemplo, en las liquidaciones por casos de quiebra, la subasta es más ejecutiva. Por último, Internet y otros desarrollos tecnológicos han reducido el costo de informatización de las subastas, facilitando su uso incluso para bienes de muy bajo costo.

No obstante la relevancia económica de las subastas, la evidencia muestra una grave impericia por parte de quienes las utilizan. Según Skitmore (2002), en la industria de la construcción las licitaciones se adjudican casi por casualidad. Hendricks *et al.* (1987) reportan pérdidas económicas sistemáticas en la industria de extracción de petróleo. Rothkopf y Park (2001) describen el caso de la licitación del espectro electromagnético en Australia, cuyas bases no especificaron multas por retirar las ofertas realizadas. Aprovechándose de ello, una cierta firma presentó múltiples ofertas con diferentes valores. Una vez que se publicaron las distintas posturas, la firma retiró su mayor oferta, luego la segunda y así, de manera sucesiva, hasta preservar aquella que estaba marginalmente por encima de la mejor oferta de los otros postores.

El objetivo de este trabajo es presentar los aspectos más generales de la teoría de subastas. Modelar este mecanismo de compraventa permite cuantificar algunas estrategias óptimas, que con frecuencia son contrarias a la intuición. Los temas son presentados de manera más simple que como lo hace la literatura especializada, por lo cual sólo es necesario que el lector conozca aspectos muy básicos de cálculo diferencial e integral. Quienes ya están familiarizados con esta teoría deben consultar fuentes más avanzadas como, por ejemplo, Krishna (2002) o Milgrom (2004). En la sección 1 presentamos las cuatro subastas más usadas según Pérez (1992): la licitación de sobre sellado, la subasta de segundo precio, el remate inglés y la subasta holandesa. En la sección 2 presentamos una manera intuitiva de calcular la esperanza del precio de adjudicación. En la sección 3 revisamos algunos resultados de laboratorio, que confirman en algunos casos y que refutan en otros las deducciones de los modelos teóricos. En la sección 4 calculamos el precio de reserva óptimo que debe imponer el subastador. En la sección 5 estudiamos cómo afecta la actitud frente al riesgo a las ofertas de los postores. En la sección 6 estudiamos las subastas en las que el valor del bien depende de todos los postores en competencia. En la sección 7 presentamos las subastas combinatoriales, que permiten a los postores presentar ofertas por paquetes de bienes. Finalmente, en la sección 8 discutimos la utilidad de estudiar la teoría de las subastas.

I. CLASES MAS USADAS DE SUBASTAS

Supongamos que un subastador desea vender un bien. A continuación describiremos cuatro mecanismos basados en el supuesto de *valor privado independiente*, es decir, cada uno de los postores sabe cuánto valora el bien, pero ignora la valoración de los otros. Esto suele ocurrir con bienes no duraderos, en que la utilidad derivada del consumo es específica a cada postor. En esta sección adoptaremos el *modelo clásico* de subastas, basado en los siguientes supuestos:

- Los postores son simétricos, es decir, la distribución de probabilidad que define su valoración privada (su tipo) es la misma para todos. Cada postor es racional y, por lo tanto, actúa de la manera óptima (en la sección 3 relajamos este supuesto).
- El valor pagado por el ganador depende solamente de las ofertas formuladas por los postores. No consideraremos cuotas de entrada, límites mínimos u otras definiciones (en la sección 4 relajamos este supuesto).
- Los postores y el subastador son neutrales al riesgo (en la sección 5 relajamos este supuesto).

- El bien subastado es de valor privado independiente, esto es, la valoración depende de cada postor y no correlaciona con la valoración de otros postores (en la sección 6 relajamos este supuesto).

A. Licitación de sobre sellado

En una *subasta de sobre sellado* o *licitación*, dos o más postores indican privadamente el precio que están dispuestos a pagar por el bien subastado. A continuación el subastador abre los sobres y adjudica el bien al postor que hizo la oferta más alta, resolviendo la adjudicación al azar si existe un empate. En su modelación más sencilla, el postor 1 y el postor 2 tienen una valoración no negativa v_1 y v_2 del bien que el destino ha elegido a partir de una distribución uniforme de probabilidad en el rango [0, 1], y ha revelado confidencialmente a cada uno de ellos. Ambos desean definir su oferta $o_i(v_i)$ como función de sus respectivas valoraciones v_i, con i Î {1, 2}. Dado que tienen idénticas características, salvo su valor v_i, la función de oferta debería ser idéntica, es decir, $o_i(v_i) = o(v_i)$.

El valor esperado para el postor 1 de participar en la subasta es el siguiente, en donde la expresión $(v_1 - o(v_1))$ corresponde al *excedente* de la transacción para el postor y P(ganar) la probabilidad de adjudicarse el bien:

$$E_1(\text{subasta}) = P(\text{ganar}) \cdot (v_1 - o(v_1)) + (1 - P(\text{ganar})) \cdot 0 = P(\text{ganar}) \cdot (v_1 - o(v_1)).$$

Para obtener P(ganar) supongamos que la función $o(v_i)$ tiene la estructura lineal $o_i = a + b \cdot v_i$, con $b \geq 0$, esto es, la oferta es lineal y estrictamente creciente respecto de la valoración privada del postor[1]. Sabemos que $a = 0$, pues si $v_i = 0$ entonces no conviene hacer una oferta positiva, y o_i no puede ser negativa. Dado que $v_i \sim U[0, 1]$, la probabilidad de ganar del postor 1 es:

$$P(ganar) = \int_0^{v_1} dv_2 = v_1 = (1/b) \cdot o_1 = k \cdot o_1$$

[1] El supuesto de linealidad simplifica los cálculos, pero sólo se necesita que la oferta sea estrictamente creciente en la valoración.

De la definición lineal de o_i obtenemos que $v_1 = k \cdot o_1$, en donde $k = 1/b$. Entonces, el valor esperado de participar en la subasta es:

$$E_1(\text{subasta}) = k \cdot o_1 \cdot (v_1 - o_1).$$

Si el postor 1 es neutral al riesgo, desea determinar $o(v_1)$ que maximiza E_1(subasta), lo que se obtiene de la condición de primer orden:

$$\frac{\partial E_1(\text{subasta})}{\partial o_1} = 0 \rightarrow k \cdot v_1 - k \cdot 2_{01} = 0 \rightarrow o(v_1) = \frac{v_1}{2}$$

El resultado anterior puede extenderse a licitaciones con N postores. El postor 1 le ganará a su adversario j sólo si su valoración v_1 es mayor que v_j. Si enfrenta a $N - 1$ adversarios cuya valoración es una variable aleatoria $v_j \sim U[0, 1]$ independiente, la probabilidad de que el postor le gane a sus $N - 1$ adversarios es:

$$(P(\text{ganarle a un adversario}))^{N-1} = v_1^{N-1} = (k \cdot o_i)^{N-1}.$$

El valor esperado para el postor 1 de participar en la subasta contra $N - 1$ adversarios es:

$$E_1(\text{subasta}) = (k \cdot o_1)^{N-1} \cdot (v_1 - o_1).$$

De la condición de primer orden:

$$\frac{\partial E_1(\text{subasta})}{\partial o_1} = 0 \rightarrow k^{N-1} \cdot (N-1) \cdot o_1^{N-2} \cdot (v_1 - o_1) - k^{N-1} \cdot o_1^{N-1} = 0$$

Si se supone que o_1 óptimo debe ser positivo, pues de otro modo se perdería la licitación de seguro, es posible simplificar la expresión anterior por o_1^{N-2} y por k^{N-1}:

$$(\mathrm{N}-1) \cdot (v_1 - o_1) - o_1 = 0 \rightarrow o_1 \frac{N-1}{N} v_1$$

En la subasta de compra se convoca a varios eventuales proveedores i, quienes formulan una oferta de venta p_i por un bien cuyo costo individual es w_i. El excedente del ganador es $p_i - w_i$ y el de los perdedores es cero. Recordando que en la subasta de venta cada postor formula una oferta o_i por un bien que valora en v_i, y que el excedente del ganador es $v_i - o_i$ y el de los perdedores es cero, interpretaremos la subasta de compra como una de venta en la que el bien es valorado en $-w_i$ y en que la oferta es $-p_i$. Tal como en la subasta de venta gana el postor i con mayor o_i, en la de compra gana el de mayor $-p_i$, es decir, de menor precio p_i. El excedente del ganador es $(-w_i - (-p_i)) = p_i - w_i$ y el de los perdedores es cero. En resumen, las subastas de compra y venta tienen una estructura análoga, por lo que nos concentraremos sólo en la de venta.

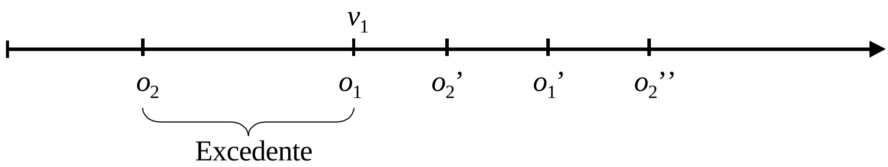
B. Subasta de segundo precio o de Vickrey

Una subasta se llama de *segundo precio* cuando el ganador es el oferente que ofreció el mayor precio por el bien, pero no paga el precio que él ofreció, sino la segunda oferta más alta. A modo de ejemplo, si Pedro, Juan y Diego ofrecen privadamente $ 30, $ 20 y $ 40, Diego se adjudica el bien y paga $ 30. Este mecanismo también se denomina *subasta de Vickrey*, en honor a William Vickrey (1961), premio Nobel de Economía en 1996.

La ventaja de esta subasta es que el postor tiene como estrategia débilmente dominante formular una oferta igual a su verdadera valoración del bien. Tal como se aprecia en la Figura 1, si el postor 1 gana, no aumenta el excedente cuando su oferta o_1 está por debajo de su valoración v_1, pues su excedente sigue siendo $(v_1 - o_2)$, en donde o_2 es la segunda mejor oferta. Reducir o_1 disminuye su probabilidad de ganar, pues podría ocurrir que $o_1 < o_2$. Tampoco le conviene formular o_1' por encima de v_1, pues podrían ocurrir tres situaciones:

- La mejor oferta del adversario o_2 está por debajo de v_1, así es que con $o_1 = v_1$ también se habría adjudicado el bien.
- La mejor oferta del adversario o_2' está entre v_1 y o_1', por lo cual el postor 1 se adjudica el bien, pero su excedente $(v_1 - o_2')$ es negativo.
- La mejor oferta del adversario o_2'' está por encima de o_1', así es que el postor 1 pierde la subasta de todas formas.

FIGURA 1
ANALISIS DE LA SUBASTA DE VICKREY



Un ejemplo similar a la subasta de Vickrey es el sistema de "postura de libro", utilizado en algunos remates de estampillas en Londres. Quienes están interesados en participar en la subasta, pero por algún motivo no puedan concurrir, tienen derecho a registrar por adelantado su postura. Si en la subasta ocurre que la última oferta de quienes se encuentran presentes no supera a las dos posturas más altas registradas previamente en el libro, el subastador adjudica el bien a quien formuló la oferta más alta, a un precio igual a la segunda postura, más una cierta cantidad fija. Por este motivo, la subasta de Vickrey también se denomina la *subasta del filatelista*.

Los sitios en Internet eBay y Amazon utilizan un mecanismo similar a la subasta de Vickrey. En cualquier momento de la subasta, que puede durar varios días, el usuario especifica su máxima disposición a pagar por el bien. El sistema permanentemente informa cuál es el precio actual de adjudicación, igual a la segunda mejor oferta más un pequeño incremento, luego de lo cual eBay programa una fecha y hora fija de adjudicación. Amazon también define un instante de cierre, pero prolonga la subasta hasta que pasen más de diez minutos sin nuevas ofertas. Aunque a los postores les convendría formular desde un principio una oferta igual a su valoración, muchos la incrementan durante el proceso. Ello ocurre con productos estándar cuyos precios son bien conocidos, lo que descarta que la persona incremente su valoración al constatar las ofertas de sus adversarios. Muchos usuarios formulan ofertas de último minuto (*sniping* en inglés), con el riesgo de que eBay no las reciba a tiempo debido a la congestión en Internet. Según Roth y Ockenfels (2002), el *sniping* no es irracional, pues la probabilidad de falla del *sniping* posibilita una colusión implícita que libra a los postores de enfrascarse en una guerra de ofertas ascendentes. Por lo tanto, el mecanismo de eBay se parece a una subasta de Vickrey, pero en realidad no lo es.

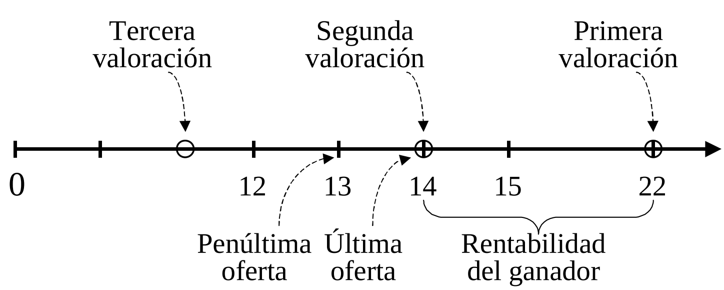
Los agentes de mercado en general evitan participar en subastas de Vickrey, porque los obliga a revelar información que los puede perjudicar en el futuro. Conociendo la valoración del bien de sus postores, en una próxima subasta el vendedor podría fijar un precio mínimo ligeramente inferior a la valoración del postor que más valora el bien, extrayéndole al ganador todo su excedente. Otro inconveniente es que puede llevar a resultados embarazosamente inesperados (Harford, 2006). Cuando el gobierno neozelandés subastó licencias radioeléctricas a principios de los 90, la opinión pública se escandalizó al enterarse de que un postor que ofreció NZ$ 100.000 por una licencia terminó pagando NZ$ 6, y otro que ofreció NZ$ 7 millones por otra licencia, sólo pagó NZ$ 5.000.

C. Remate inglés y unidad monetaria

En una *subasta inglesa* o *remate* el subastador o *martillero* anuncia en voz alta cuál es el precio más alto ofrecido hasta el momento, el que puede ser superado por cualquier postor. El proceso se detiene cuando los postores se desisten de superar la mejor oferta, adjudicándose el bien al postor que la formuló.

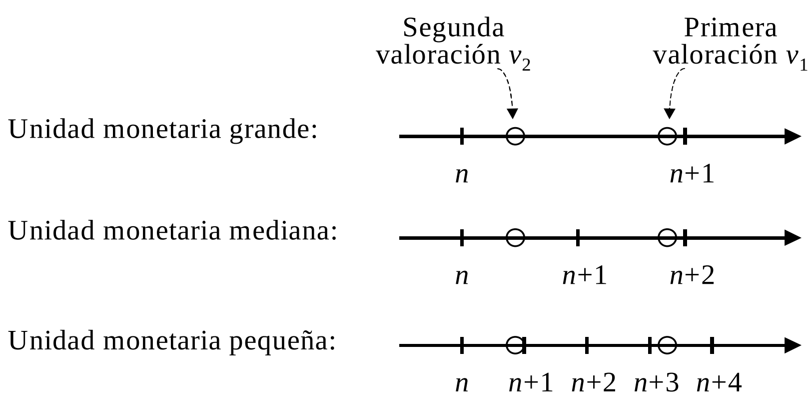
Para modelar este mecanismo, supongamos que los precios sólo pueden expresarse en valores enteros, ya sea miles de dólares o millones de pesos, y que nadie ofrecerá un precio igual o mayor que su propia valoración. Suponiendo que las valoraciones son las indicadas en la Figura 2, el postor con la valoración de 14 ofrecerá hasta 13 por el bien, por lo que al postor cuya valoración es 22 le bastará ofrecer 14 para adjudicarse el remate. Por lo tanto, el precio de venta en un remate inglés es, en este caso, igual a la segunda valoración más alta del bien.

FIGURA 2
VALORACIONES EN UN REMATE INGLES



Los subastadores pueden exigir unidades monetarias de diferentes magnitudes. Las casas de remates Christie's y Sotheby's exigen incrementos de entre un 5 y un 10 por ciento de la postura más alta hasta el momento (Sinha y Greenleaf, 2000). La conveniencia de elegir unidades grandes o pequeñas depende, entre otras cosas, de la distribución de probabilidad que el subastador le asigna a la valoración de los postores. Supongamos que la primera y la segunda valoración son las que muestra la Figura 3. Si la unidad monetaria es grande, podría ocurrir que ambas valoraciones caen dentro del incremento mínimo exigido, por lo que el precio de adjudicación será $n < v_2$. Tanto el postor 1 como el postor 2 podrían hacerse del bien, dependiendo de quién formuló la oferta n. Si la unidad monetaria es mediana, uno de los valores factibles $n + 1$ podría caer en el intervalo entre v_2 y v_1. El precio de adjudicación dependerá de quién ofreció n. Si fue el postor 2, el postor 1 incrementará su oferta a $n + 1$. Si fue el postor 1, el bien se adjudicará a un precio n. En la medida que la unidad monetaria es más pequeña, habrá más valores factibles entre v_2 y v_1, por lo que el precio de adjudicación se acercará a v_2.

FIGURA 3
EFECTO DE LA UNIDAD MONETARIA



Cuando la unidad monetaria es suficientemente pequeña, se adjudica el bien a quien declara la mayor valoración, pero a un precio igual a la segunda mayor valoración. Por ello, la estructura lógica del remate es *isomórfica* a la subasta de Vickrey. Esta *equivalencia estratégica* sólo se da si las subastas son de valor privado independiente. Si la valoración de los postores correlaciona (sección 6), la equivalencia no se cumple, pues el remate transmite más información a los jugadores que la subasta de Vickrey.

D. Subasta holandesa

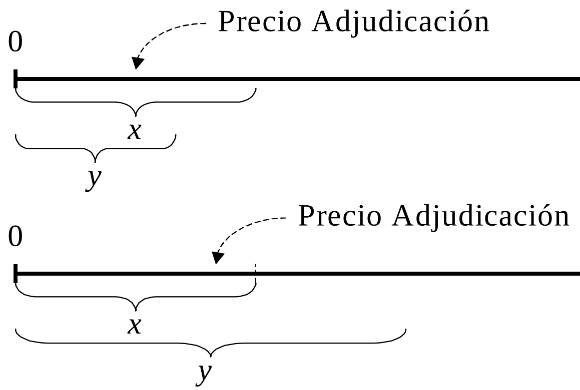
En la *subasta holandesa* el subastador informa un precio inicial alto, digamos \$ 100, y a continuación anuncia \$ 99, \$ 98, \$ 97 y así sucesivamente, hasta que alguno de los postores detiene la secuencia descendente informando que está dispuesto a comprar a dicho precio. Este mecanismo se utiliza en Holanda para la venta de tulipanes y otras flores, en Japón para vender pescado y en Toronto para vender tabaco. Algunas tiendas de liquidaciones *outlet* adaptan este tipo de subasta de la siguiente manera: semana a semana rebajan sus productos en un determinado porcentaje. Los clientes esperan hasta que el producto baje hasta un cierto precio para comprarlo, corriendo el riesgo de que alguien se les adelante.

La oferta que realiza cada postor neutral al riesgo es idéntica a la de la licitación de sobre sellado. Cada jugador debe decidir a cuál precio detener la secuencia de descenso, sin conocer las acciones de sus adversarios. El postor sólo se entera de cómo actúa el resto cuando alguno de ellos detiene la secuencia, es decir, cuando ya es demasiado tarde. Por lo tanto, la estructura lógica de la subasta holandesa es *isomórfica* a la de la licitación.

II. ESPERANZA Y VARIANZA DEL PRECIO DE ADJUDICACION

Calcularemos el valor esperado del precio de adjudicación de la licitación de dos postores mediante la Figura 4. La variable x representa la valoración del postor X y la variable y la valoración para el postor Y. En tanto y es menor que x, el precio de adjudicación es $x/2$, mientras que cuando y es mayor que x, el precio de adjudicación es $y/2$.

FIGURA 4
VALORACION DE LOS OFERENTES X E Y EN LA LICITACION



Asumiendo que la valoración de cada postor distribuye uniforme en el tramo [0,1], el valor esperado del precio de adjudicación de la licitación es:

$$\int_0^1 \left(\int_0^x \frac{1}{2} x\, dy + \int_x^1 \frac{1}{2} y\, dy + \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} xy \Big|_0^x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} y^2 \Big|_x^1 \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} x^2 \Big|_0^x + \frac{1}{4} y^2 \Big|_x^1 \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{4} (1 - x^2) \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} x^3 = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$$

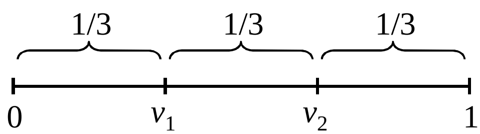
En el caso del remate con dos postores, si *y* es menor que *x*, el precio de adjudicación es *y*. Si *y* es mayor que *x*, el precio de adjudicación es *x*. Obtenemos el valor esperado del precio de adjudicación resolviendo:

$$\int_0^1 \left(\int_0^x y dy + \int_x^1 x dy \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} y^2 \Big|_0^x + xy \Big|_x^1 \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} x^2 \Big|_0^x + x(1-x) \right) dx = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2} x^2 \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}(1-0) - \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{3}$$

Una manera intuitiva de calcular el valor esperado del precio de adjudicación es considerando el valor esperado de v_1 y v_2 sobre el intervalo [0,1]. La Figura 5 muestra la "localización esperada" de dos variables aleatorias uniformes. En la licitación la oferta ganadora es igual a la mitad de v_2 = 2/3, es decir, 1/3. En el remate el precio de adjudicación es la segunda valoración igual a v_1 = 1/3.

FIGURA 5
RESOLUCION INTUITIVA DEL PRECIO DE ADJUDICACION



Según el *teorema de equivalencia de ingresos* de Myerson (1981) para el modelo clásico de subastas, el valor de adjudicación de la licitación es idéntico al valor de adjudicación del remate para cualquier número de postores y cualquier distribución de sus valoraciones. Recordando que la subasta de Vickrey es isomórfica al remate, y que la subasta holandesa es isomórfica a la licitación, concluimos que los cuatro mecanismos de la sección 1 generan el mismo valor esperado del precio de adjudicación.

El modelo clásico de subastas adjudica el bien a quien más lo valora, con lo cual cumple con la eficiencia de Pareto. Si no se cumpliera esta condición de eficiencia, quien se adjudica el bien se lo vendería posteriormente al oferente que más lo valora, obteniendo con ello un margen de venta a expensas del subastador. No obstante este último tiene el poder para evitar la aparición de intermediarios, no logra extraerle al ganador todo el excedente de la transacción. Dicho excedente, igual a $v/2$ en el caso de dos postores, puede interpretarse como el valor de la asimetría de información en favor de los postores. Si no se cumple la simetría entre los postores (propia del modelo clásico), entonces no necesariamente se le asigna el bien a quien más lo valora. Supongamos que es de dominio público que la valoración v_i de un cierto postor i distribuye sobre un intervalo cuya cota superior es mayor que las cotas superiores de los intervalos del resto de los postores. En tal caso al subastador le podría convenir discriminar a i, de manera de disuadirlo a reducir su oferta si v_i está cerca de su cota superior.

Definamos v como la valoración de un postor del bien subastado. Si al modelo clásico le agregamos el supuesto de que la valoración de los N postores muestra una distribución uniforme de probabilidad, se cumplen los siguientes resultados (Vickrey, 1961).

La oferta óptima de cada postor es: $\left(\frac{N-1}{N}\right)\cdot v$

El excedente esperado para cada postor es igual a la probabilidad de adjudicarse el bien, multiplicada por el excedente del ganador, es decir:

$$v^{N-1}\cdot\left(v-\left(\frac{N-1}{N}\right)\cdot v\right)=\frac{v^N}{N}$$

El valor esperado del precio de adjudicación pagado al vendedor es: $\frac{N-1}{N+1}$

La desviación estándar de la licitación de sobre sellado σ_l, equivalente a la desviación estándar de la subasta holandesa σ_h, es:

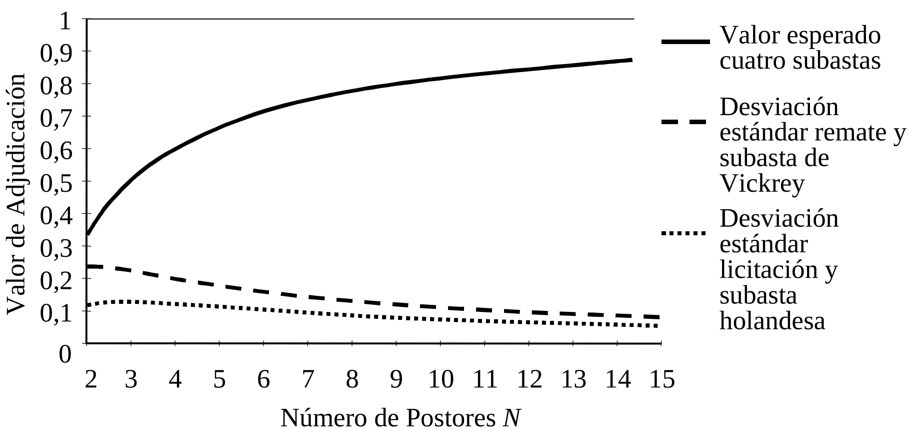
$$\sigma_l = \sigma_h = \sqrt{\frac{(N-1)^2}{N\cdot(N+1)^2\cdot(N+2)}}\,.$$

La desviación estándar del remate σ_r, equivalente a la desviación estándar de la subasta de Vickrey σ_v, es:

$$\sigma_r = \sigma_v = \sqrt{\frac{2\cdot(N-1)}{(N+1)^2\cdot(N+2)}}\,.$$

La Figura 6 muestra para distintos valores de N el precio esperado de adjudicación, y la desviación estándar de las cuatro subastas estudiadas. Si $N = 2$ el valor esperado de las subastas es 1/3, $\sigma_l = 0{,}11$ y $\sigma_r = 0{,}24$. Por lo tanto, si se licita un bien de acuerdo con los supuestos del modelo clásico y la valoración privada de los postores distribuye U[0,1], el valor de adjudicación cuando hay dos postores es 1/3 ± 0,11 aproximadamente, mientras que si se remata es 1/3 ± 0,24. Si existen tres postores entonces el valor de adjudicación es ½ ± 0,13 para la licitación y ½ ± 0,22 para el remate. La menor variabilidad en el precio de adjudicación de la licitación recomiendan utilizarla si el subastador es adverso al riesgo.

FIGURA 6
VALOR ESPERADO Y DESVIACION ESTANDAR
DEL PRECIO DE ADJUDICACION



III. RESULTADOS EMPIRICOS

Para evaluar el desempeño en la práctica de los diferentes mecanismos de subastas, Coppinger *et al.* (1980) hicieron participar a varios sujetos en una serie de experimentos de laboratorio. A cada sujeto le asignaron una valoración del bien a subastar a partir de una distribución uniforme de probabilidad entre US$ 0,1 y US$ 10. Luego fueron recompensados en función del beneficio o excedente total que obtuvieron en cada una de las subastas realizadas. Podemos asumir una actitud neutral al riesgo de los postores, porque cada sujeto participó en varias subastas y, por lo tanto, el beneficio de cada una de ellas era pequeño respecto de su recompensa total. Los sujetos fueron aislados unos de otros, para preservar el supuesto de valoración individual independiente. Las hipótesis que interesaba corroborar o refutar eran:

- ¿Es cierto que el valor esperado de adjudicación de las subastas es idéntico? ¿Es dicho valor esperado igual al óptimo, es decir, la segunda mayor valoración de los postores? Algunas de las respuestas obtenidas fueron:
  - La licitación de sobre sellado muestra un precio significativamente superior al óptimo, lo que implica que es la más conveniente desde el punto de vista del subastador.
  - La subasta de Vickrey muestra un precio levemente inferior al óptimo, resultado obtenido con una baja significación estadística.
  - El remate muestra un precio levemente superior al óptimo, resultado obtenido con una baja significación estadística.
  - La subasta holandesa cumple la predicción.
- ¿Se cumplen las predicciones de desviación estándar? Algunas de las respuestas obtenidas fueron:
  - La licitación de sobre sellado muestra una desviación estándar significativamente superior a la predicha por el modelo.
  - La subasta de Vickrey cumple la predicción.
  - El remate cumple la predicción.
  - La subasta holandesa cumple la predicción.
- ¿Se cumple la eficiencia de Pareto, es decir, se adjudica el bien al postor con una mayor valoración del bien? Algunas de las respuestas obtenidas fueron:
  - La licitación de sobre sellado es eficiente un 90,2 por ciento de las veces.
  - La subasta de Vickrey es la segunda más eficiente. Alcanza el óptimo de Pareto el 95,7 por ciento de las veces.
  - El remate es el mecanismo más eficiente. Genera el óptimo de Pareto un 97 por ciento de las veces.
  - La subasta holandesa es la menos eficiente, alcanzando el óptimo de Pareto sólo el 80 por ciento de las veces.
- ¿Existe alguna limitación a la capacidad de razonar o aprender que cuestione el isomorfismo del remate y de la subasta de Vickrey? Algunas de las respuestas obtenidas fueron:
  - La subasta de Vickrey muestra importantes efectos de aprendizaje, convergiendo al resultado teórico luego de varias iteraciones.

– La subasta de Vickrey y el remate son isomórficos si se consideran los efectos de aprendizaje.

En resumen, los resultados empíricos confirman la validez de los modelos estudiados para el caso de la subasta de Vickrey, el remate y la subasta holandesa, si bien en este último caso a veces se viola la eficiencia de Pareto. La modelación de la licitación de sobre sellado resulta inapropiada, porque los postores suelen formular ofertas por encima de su estrategia óptima. Dado que las consecuencias de tales ofertas son poco significativas, algunos investigadores piensan que son el efecto de pequeños errores de cálculo de las personas. Smith y Walker (1993) atribuyen estos resultados a una aversión al riesgo por parte de los postores, que luego modelaremos en la sección 5.

IV. PRECIO DE RESERVA OPTIMO

El *precio de reserva* del subastador es el valor r por debajo del cual las posturas de los compradores son rechazadas. Este valor puede o no ser igual a la valoración v que tiene el subastador del bien a transar. En un remate, si el subastador fija un r mayor que la valoración v_2 del segundo postor que más valora el bien, quien se lo adjudica paga $r > v_2$. Así se habría evitado el fiasco de la licitación del espectro electromagnético en Nueva Zelanda (Milnor, 1998), que le adjudicó a un estudiante una licencia de televisión por US$ 1. La desventaja de fijar un precio de reserva es que si $r > v$, es posible que la valoración v_1 del postor que más valora el bien no sea suficientemente alta, es decir, $v < v_1 < r$, y por ello no se concrete la transacción, no obstante que habría sido de mutuo beneficio para las partes.

Definamos el *precio de reserva óptimo* $r^*(v)$ al precio de reserva que maximiza la utilidad del subastador, que es función de su valoración v del bien subastado. También definamos $F(\cdot)$ como la función acumulada de probabilidad de valoración de los postores. Con los supuestos del modelo clásico, Riley y Samuelson (1981) demuestran que el precio de reserva óptimo satisface la siguiente ecuación, para cualquier número de postores:

$$v = r^* - \frac{1 - F(r^*)}{F'(r^*)}$$

Si la valoración de los postores distribuye U[0, 1], por lo cual $F(x) = x$ y $F'(x) = 1$, se deduce que el precio de reserva óptimo es:

$$r^* = \tfrac{1}{2} \cdot v + \tfrac{1}{2}.$$

A modo de comprobación, repitamos el cálculo del valor esperado del precio de adjudicación de un remate, pero considerando un precio de reserva $r^* = ½$, que asume la valoración v del subastador igual a cero. En la siguiente expresión, la primera integral condiciona la valoración del postor X a estar por debajo de ½; si el postor Y también tiene una valoración inferior a ½ entonces no se adjudica el bien y el vendedor obtiene una utilidad $v = 0$; si el postor Y tiene una valoración superior a ½ entonces se adjudica el bien a $r^* = ½$. La segunda integral condiciona la valoración del postor X a estar por encima de ½; si el postor Y tiene una valoración inferior a ½ entonces se adjudica a $r^* = ½$; si el postor Y tiene una valoración superior a ½ pero inferior a la del postor X entonces se adjudica a la valoración del postor Y; si el postor Y tiene una valoración superior la del postor X entonces se adjudica a la valoración del postor X. Dado que 5/12 > 1/3, corroboramos que el precio de reserva aumenta la utilidad del subastador.

$$v^* = \int_0^{1/2}\left(\int_0^{1/2} 0\,dy + \int_{1/2}^{1}\frac{1}{2}\,dy\right)dx + \int_{1/2}^{1}\left(\int_0^{1/2}\frac{1}{2}\,dy + \int_{1/2}^{x} y\,dy + \int_x^1 x\,dy\right)dx = \frac{5}{12}$$

Podemos demostrar el teorema del precio de reserva óptimo r^* para el caso de dos postores cuyas valoraciones distribuyen U[0, 1], generalizando la expresión para v^*. Recordando que v es la utilidad para el vendedor de conservar el bien:

$$v^* = \int_0^{r^*}\left(\int_0^{r^*} v\,dy + \int_{r^*}^{1} r^*\,dy\right)dx + \int_{r^*}^{1}\left(\int_0^{r^*} r^*\,dy + \int_{r^*}^{x} y\,dy + \int_x^1 x\,dy\right)dx = r^{*2} \cdot r + r^{*2} - \frac{4}{3} \cdot r^{*3} + \frac{1}{3}$$

Obtenemos los óptimos locales para $0 \leq r^* \leq 1$ mediante la condición de primer orden:

$$\frac{\partial v^*}{\partial r^*} = 2 \cdot r^* \cdot v + 2 \cdot r^* - 4 \cdot (r^*)^2 = 0$$

El resultado es $r^* = ½ \cdot v + ½$ ó $r^* = 0$. Con el objeto de establecer si los óptimos locales son mínimos o máximos, calculamos $\partial^2 v^*/\partial r^{*2} = 2 \cdot v + 2 - 8 \cdot r^*$, de donde concluimos que $r^* = ½ \cdot r + ½$ es el máximo en el tramo $0 \leq r^* \leq 1$, y $r^* = 0$ es el mínimo.

Bulow y Klemperer (1996) cuestionan que valga la pena diseñar de manera óptima una subasta. A diferencia del modelo recién descrito, en la práctica el número de postores es endógeno, es decir, depende del diseño de la subasta. En tal caso, basta que alguna regla de la subasta óptima disuada a un postor de participar para que se esfume cualquier ganancia teórica para el subastador respecto de la subasta inglesa estándar[2]. Por lo mismo, un vendedor no debería aceptar participar de una negociación que excluye *a priori* a otros oferentes interesados. El valor de un postor adicional siempre sobrepasa cualquier concesión dada por la contraparte en el contexto de una negociación.

V. ACTITUDES FRENTE AL RIESGO EN LAS SUBASTAS

Relajar el supuesto de neutralidad al riesgo del modelo clásico no produce efecto en el remate: el bien sigue adjudicándose a la segunda valoración, que es el precio por encima del cual nadie aumenta su oferta. En una licitación de sobre sellado la aversión al riesgo de cada postor influye en su oferta y, por consiguiente, en el precio de adjudicación del bien. Si la función de utilidad de los postores es $(v_i - o_i)^{½}$, el postor 1 maximiza:

$$E_1(\text{subasta}) = k \cdot o_1 \cdot (v_1 - o_1)^{½}.$$

La condición del primer orden es:

2 Esto también es válido relajando el supuesto de valor privado independiente (sección 6).

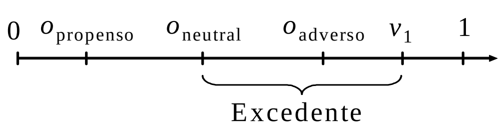
$$\frac{\partial E_1(\text{subasta})}{\partial o_1} = 0 \rightarrow k \cdot (v_1 - o_1)^{1/2} - \frac{k\, o_1\, (v_1 - o_1)^{-1/2}}{2} = 0$$

Si suponemos que $v_1 > o_1$, pues de otra manera el excedente del postor sería cero o negativo, podemos amplificar por $(v_1 - o_1)^{½}$ y cancelar k, por lo que:

$$o_1 = \frac{2}{3} v_1$$

Observamos que las ofertas de postores que muestran aversión al riesgo son mayores que las ofertas de postores neutrales al riesgo, iguales a $½v_i$. Esto justifica la tendencia de muchas personas a formular ofertas mayores que lo calculado en la sección 2. Con una función de utilidad propensa al riesgo, la oferta óptima es menor que $½v_i$. La Figura 7 muestra que mientras los agentes neutrales al riesgo maximizan su valor esperado, quienes muestran aversión al riesgo "aseguran" ganancias sacrificando excedente, en tanto los propensos al riesgo "se la juegan" por un alto excedente, aunque se obtenga con una baja probabilidad.

FIGURA 7
COMPARACION DE OFERTAS PROPENSA, NEUTRAL
Y ADVERSA AL RIESGO



El valor de la oferta como función de la actitud frente al riesgo del postor explica por qué el estado usualmente licita sus concesiones. Las firmas interesadas en general muestran aversión al riesgo, sobre todo si su supervivencia depende de la adjudicación de la concesión. Para asegurarse la adjudicación, formulan ofertas relativamente altas, lo que se traduce en un mayor ingreso para el estado. Por otra parte, los caballos de carreras se subastan mediante el remate inglés. Los postores son propensos al riesgo —de otro modo no disfrutarían de las apuestas— y si participan en una licitación sus ofertas serían más bajas que su postura en un remate.

VI. SUBASTAS DE VALOR COMUN O CORRELACIONADO

Una subasta es de *valor común* si el bien subastado tiene la misma valoración para cada uno de los eventuales compradores. Ello ocurre si, posteriormente a ser adjudicado, el bien puede transarse a un precio de mercado que es independiente del postor que lo pone en venta. Por ejemplo, si las firmas que compiten por adjudicarse una cierta pertenencia minera son similares, el valor que le atribuyen a la pertenencia depende del mineral contenido y de otras características físicas; no de cuál firma se adjudica la subasta.

La particularidad de las subastas de valor común es que ninguno de los oferentes conoce el valor exacto del bien. Quien formula una oferta por una obra de arte sabe que su valor depende de la opinión agregada de un sinnúmero de críticos y coleccionistas. Cuando se subastan acciones de primera emisión (en inglés *initial public offering* o IPO), cada agente de mercado tiene una opinión acerca del valor económico de la empresa, que depende de sus ventas, activos, posibilidad de crecimiento, etc. Sin embargo, todos saben que su valor real es el precio que le asigna a la acción el mercado como un todo, pues ése es el precio al que los accionistas pueden vender la acción. John Maynard Keynes comparó las inversiones en la bolsa con un concurso de belleza organizado por un periódico de la época, en que los lectores debían votar a favor de la candidata que ellos creían recibiría el mayor número de preferencias. Tal disposición hacía de la belleza de la candidata un aspecto secundario; el objetivo de cada lector consistía en adivinar cuál de ellas era el *punto focal* del certamen, esto es, en cuál de ellas se concentraba la atención de los lectores (Schelling, 1960).

Modelaremos el valor incierto que el postor i le atribuye al bien a subastar mediante una variable aleatoria V_i. En el ejemplo de la pertenencia minera, V_i representa el valor de las reservas de mineral. Asumiendo que los datos y métodos de análisis son comunes a todas las firmas interesadas, la distribución de probabilidad de V_i es idéntica para cada uno de los postores, es decir, $V_i = V$. La *realización* v_i de la variable V que observa la firma i, es decir, el valor que estima cada firma, es eventualmente distinto, debido a sesgos individuales y a aspectos fortuitos que intervienen en la valoración. El verdadero valor del bien a subastar está determinado por el valor esperado $E(V)$, que se supone anula los sesgos individuales y el ruido aleatorio. Según el *teorema central del límite*, cuando el número n de oferentes es suficientemente alto:

$$\text{Valor común del bien} = E(V) \approx \frac{1}{\mathrm{n}} \sum_{i=1}^{n} v_i$$

Bazerman y Samuelson (1983) describen un ejemplo de subasta de valor común, que adaptamos a continuación. Un frasco transparente lleno de un número desconocido de bolitas es subastado entre los alumnos de un curso. Cada bolita tiene un valor igual a US$1. Quien formule la mayor oferta se adjudica el valor de las bolitas del frasco. Además, se ofrece un premio a quien realice la estimación más cercana del verdadero número de bolitas. ¿Cuán precisa es la estimación promedio? ¿Cuánto gana el que se adjudica la subasta?

El resultado de este experimento es que cada postor i realiza una estimación v_i. Aunque las estimaciones son muy diferentes unas de otras, el valor promedio $(1/n) \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{v_i}$ es muy cercano al número real de bolitas del frasco, porque las sobreestimaciones tienden a compensarse con las subestimaciones. Con ello se confirma que el valor común del bien tiende a $E(V)$. Aproximadamente la mitad de los postores sobreestima el número de bolitas. De ellos, hay quienes hacen ofertas muy cercanas a su sobreestimación, con el fin de asegurarse el premio. Como consecuencia, la oferta del postor i^* que se adjudica la subasta usualmente es mayor que el valor real del frasco.

El fenómeno recién descrito se denomina la *maldición del ganador*, pues el postor i^* termina lamentando haberse adjudicado la subasta (Thaler 1988). Esto ocurre porque i^* interpreta v_i como su valoración individual del bien, en vez de como una realización de la variable aleatoria V, que debe ser combinada con muchas otras realizaciones para obtener la valoración común $E(V)$. Una situación similar fue detectada por Hendricks *et al.* (1987) en las subastas de paños submarinos para la explotación petrolera en el Golfo de México. Las reservas de cada paño eran estimadas de manera independiente por las compañías en competencia mediante estudios que, por restricciones presupuestarias, no eran muy precisos. Entre 1954 y 1969 se subastaron 1.200 paños. Se formularon en total 4.050 ofertas, lo que implica un promedio de 3,375 ofertas por cada paño. El precio promedio de adjudicación por paño fue de US$ 2,26 millones. De los 1.200 paños adjudicados, sólo en 472 se encontró petróleo, lo que se tradujo en un beneficio promedio por paño subastado de sólo US$ 2 millones, sin considerar el precio de adjudicación. Por lo tanto, en promedio cada paño significó una pérdida de US$ 0,26 millones para la firmas en competencia. Entre las 18 firmas que participaron en las licitaciones, el perjuicio de la maldición del ganador fue muy diverso. Si se multiplican por un factor θ_i todas las ofertas formuladas por la firma *i*, es posible calcular el factor óptimo θ_i* que habría maximizado su utilidad, dadas las ofertas formuladas por los otros postores. Los θ_i* de 12 firmas fueron menores que 1, con un promedio de 0,68. El θ_i* de Texaco fue 0,15, es decir, su oferta promedio fue 1/0,15 = 6,67 veces superior a lo que debió haber sido.

Cuando los postores están conscientes de la maldición del ganador, pueden reducir exageradamente sus ofertas, haciendo caer la utilidad del subastador. Para evitarlo, Milgrom y Weber (1982) proponen el *principio de ligazón*: mientras más interactúen los postores—sin que puedan coludirse—mayores serán sus ofertas. De los mecanismos de la sección I, el remate inglés es el que, por lejos, más ligazón produce, luego la subasta de Vickrey y finalmente la licitación junto con la subasta holandesa. Por ello, usualmente las ofertas de acciones de primera emisión, las obras de arte, las joyas y las antigüedades son rematadas a viva voz.

La subasta de *valor correlacionado* es una situación intermedia entre la de valor individual privado y la de valor común: la valoración del bien depende tanto de factores idiosincrásicos de cada postor, como de aspectos comunes a todos ellos. Una concesión de telefonía móvil es de valor correlacionado, pues su rentabilidad depende de la compañía que la opera y también del futuro desarrollo de las telecomunicaciones, que es el resultado del esfuerzo mancomunado de toda la industria. Para evitar que los postores redujeran sus ofertas, temiendo ser víctimas de la maldición del ganador, el remate en el Reino Unido de cinco licencias de telefonía móvil explotó al máximo el principio de ligazón (Harford, 2006). Cada vez que un postor formulaba una oferta, se obligaba a todos los otros postores a pronunciarse acerca de si estaban interesados en continuar participando de la subasta. Quienes declaraban no estarlo, se retiraban irreversiblemente. La ventaja de este procedimiento es que, mientras en el remate inglés tradicional puede ocurrir que la sala esté llena de postores, pero en la práctica sólo unos pocos continúan en competencia, en este caso quien formula una oferta sabe que todos los que permanecen en la sala la igualarían, lo que le da la tranquilidad de no estar haciendo una oferta exageradamente alta. Gracias a este diseño, que hace más transparente la información privada de los postores, la subasta recaudó más de siete veces lo que se había estimado originalmente.

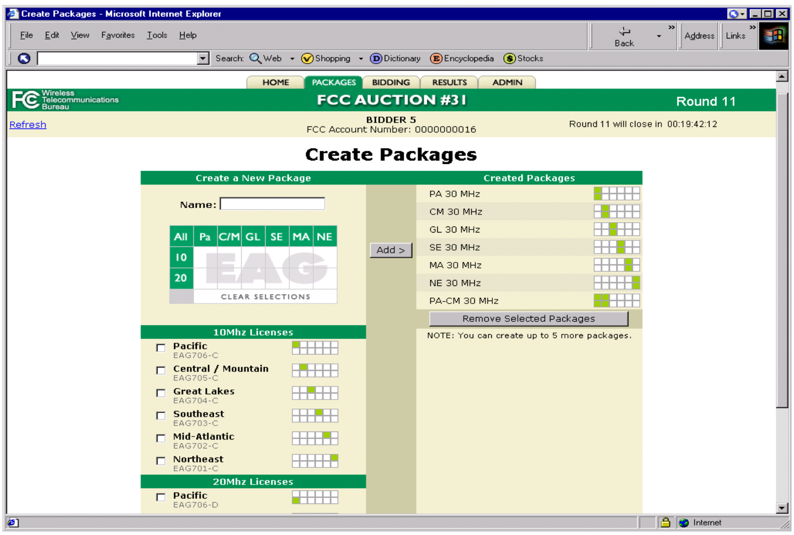
VII. SUBASTAS COMBINATORIALES

Las *subastas combinatoriales* permiten a los postores presentar ofertas por combinaciones o paquetes (*bundles* en inglés) de bienes (Vries y Vohra 2003). Con ello se intenta que cada postor capture economías de escala o de ámbito del paquete. En la licitación del espectro radioeléctrico, adjudicarse una misma banda de frecuencia en dos territorios contiguos produce importantes ahorros en infraestructura. Para una empresa transportista que actualmente moviliza carga desde A hasta C (A→C), adjudicarse el tramo desde C→B junto con el tramo desde B→A tiene mucho más valor que adjudicarse sólo uno de estos dos tramos. Adjudicarse C→B solamente representa un *riesgo de exposición*, pues no podrá operar el tramo C→A, y eventualmente recorrerá B→A sin carga alguna.

Dado que el postor valora mucho más los paquetes completos que las partes, el monto de las ofertas sube, con lo que se incrementa tanto la utilidad del subastador como la de los postores. Ledyard *et al*. (2002) reportan que la cadena de tiendas norteamericana Sears ahorró un 13 por ciento en costo de transporte subastando combinatorialmente sus contratos de carga. Epstein *et al*. (2002) aplicaron esta metodología a la licitación de contratos de alimentación escolar en Chile, logrando un ahorro de aproximadamente US$ 40 millones anuales. Hoy existen varias empresas que ofrecen el servicio de diseñar y operar estas subastas, tales como Ariba, CombineNet, Net Exchange y Trade Extensions.

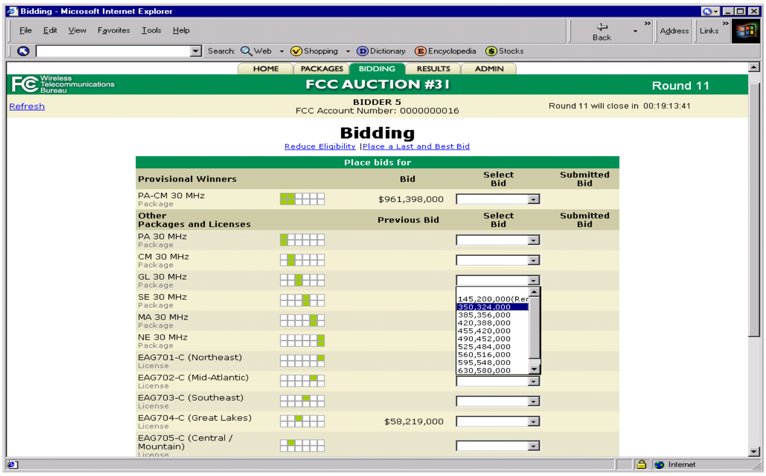
Para lograr una asignación eficiente de recursos, la subasta combinatorial debe resolver una serie de aspectos de diseño. Uno de ellos es la especificación de los paquetes, la cual puede dejarse al criterio de los postores o restringirse a un conjunto de alternativas predefinidas. La Figura 8 muestra la interfaz de un sistema que administra la licitación del espectro radioeléctrico norteamericano, a cargo de la *Federal Communications Commission* (FCC). Se ofrecen licencias del ancho de banda de 10 Mhz y del ancho de banda de 20 Mhz en seis zonas: Pacífico (Pa), Central (C/M), Grandes Lagos (GL), Sudeste (SE), Atlántico (MA) y Noreste (NE). El usuario es el postor (*bidder*) número 5. Al seleccionar una combinación de cuadrantes de la matriz en la esquina superior izquierda, se crea un nuevo paquete. En el caso mostrado el usuario 5 ya ha creado siete paquetes y puede crear como máximo cinco adicionales.

FIGURA 8
INTERFAZ DE SISTEMA DE SUBASTAS COMBINATORIAL



Cuando la presentación de ofertas se hace en un solo turno, debe definirse la forma de asignar los bienes a los diferentes postores, así como el precio que deben pagar por ellos. La Figura 8 muestra el caso de un sistema *iterativo*, que está en el turno 11 y para el cual restan 19 horas, 42 minutos y 12 segundos para finalizar. En este tipo de sistemas es necesario determinar qué información es traspasada desde una iteración a la siguiente, cuál es el nivel mínimo de actividad de cada postor, cuáles son los incrementos mínimos entre ofertas sucesivas, cuál es la condición de término del proceso, qué hacer si el ganador cae en bancarrota, etc. Todo lo anterior no sólo debe considerar la eficiencia económica, sino también aspectos prácticos, las preferencias de los postores y la posibilidad de que se coludan. La Figura 9 muestra el resultado parcial de la subasta. Uno de los paquetes ya ha sido provisionalmente asignado a un valor de US$ 961.398.000, pero el postor 5 puede mejorar la oferta seleccionándola de un menú de posibilidades.

FIGURA 9
RESULTADO PARCIAL DE SUBASTA



VIII. DISCUSION

El desarrollo de los mercados está haciendo que la subasta sea un mecanismo cada vez más utilizado por las empresas y los gobiernos. El estudio de las cuatro subastas básicas, bajo el supuesto de valor privado independiente, es un buen punto de partida para comprender cuál es la estrategia óptima de cada jugador. Las consideraciones que hacen más realistas los modelos, como por ejemplo la racionalidad limitada o la aversión al riesgo, tienen efectos que deben ser tomados en cuenta por el subastador y los postores.

En este trabajo pusimos énfasis en dos subastas que, por su amplia aplicabilidad, son de gran interés. Las subastas de valor común describen la compraventa de bienes durables que pueden transarse posteriormente en el mercado. Al estar expuestas a la maldición del ganador, pueden producir fuertes pérdidas a los postores o, anticipando tal perjuicio, pueden inhibir su participación. Las subastas combinatoriales reconocen las economías de complementación que los postores pueden generar al adjudicarse diferentes paquetes de bienes. Si el subastador no facilita la captura de tales economías, somete a los postores a un riesgo de exposición que también puede inhibir su participación. En resumen, la complejidad de las subastas realistas exige un cuidadoso análisis. Un diseño apropiado significa una ganancia para todas las partes, pues optimiza el valor económico de la asignación de los bienes y con ello maximiza la utilidad percibida por el subastador.

REFERENCIAS

Bazerman, M.H. y Samuelson, W.F. (1983). “I won de the auction but I don’t want the prize”, *Journal of Conflict Resolution* 27: 618-624.

Bulow, J. y Klemperer, P. (1996). “Auction versus negotiation”, *The American Economic Review* 86: 180-194.

Coppinger, V.M., Smith, V. y Titus, J.A. (1980). “Incentives and behavior in English, Dutch, and sealed-bid auctions”, *Economic Enquiry* 18: 1-22.

Epstein, R., Henríquez, L., Catalán, J., Weintraub, G. y Martínez, C. (2002). “A combinational auction improves school meals in Chile”, *Interfaces* 32: 1-14.

Harford, T. (2006). *The Undercover Economist*. Little, Brown, Londres.

Hendricks, K., Porter, R. y Boudeau, B. (1987). “Information, returns and bidding behavior in OCS auctions: 1954-1969”, *Journal of Industrial Economics* 35: 517-542.

Krishna, V. (2002) *Auction Theory*. Elsevier Science, San Diego, EE.UU.

Ledyard, J.O., Olson, M., Porter, D., Swanson, J.A. y Torma, D.P. (2002). “The first use of a combined-value auction for transportation services”, *Interfaces,* 32: 4-12.

Milgrom, P.M. (2004). *Putting Auction Theory to Work*. Cambridge University Press, Cambridge.

Milgrom, P.M y Weber, R.J. (1982). “A theory of auctions and competitive bidding” *Econometrica,* 50: 1089-1122.

Milnor, J. (1998). John Nash "A Beautiful Mind". Notices of the AMS, 1329-1332.

Myerson, R. (1981). “Optimal auction design”, *Mathematics of Operations Research,* 6: 58-73.

Pérez, M.A. editor (1992). *Teoría de Incentivos y sus Aplicaciones*. Fondo de Cultura Económica, México.

Riley, J.G. y Samuelson, W.F. (1981). “Optimal auctions”, *American Economic Review,* 71: 381-392.

Roth, A., y Ockenfels, A. (2002). “Last-minute bidding and the rules for ending second-price auctions: Evidence from eBay and Amazon auctions on the Internet”, *American Economic Review*, 92: 1093-1103.

Rothkopf, M.H. y Park, S. (2001). “An elementary introduction to auctions”, *Interfaces* 31: 83–97.

Schelling, T.C. (1960). *The Strategy of Conflict*. Harvard University Press, Cambridge MA.

Sinha A.R. y Greenleaf E.A. (2000). “The impact of discrete bidding and bidder aggressiveness on sellers’ strategies in open English auctions: Reserves and covert shilling”, *Marketing Science*, 19: 244–265.

Skitmore, M. (2002). “Predicting the probability of winning sealed bid auctions: A comparison of models”, *Journal of the Operational Research Society,* 53: 47-56.

Smith, V. y Walker, J.M. (1993). “Rewards, experience and decision cost in first price auctions”, *Economic Enquiry* 31: 237-244.

Thaler, R. (1988). “Anomalies: The winner curse”, *Journal of Economic Perspectives,* 2: 191-202.

Valley, K., Thompson, L. y Gibbons, R. (2002). “How communication improves efficiency in bargaining games”, *Games and Economic Behavior,* 38:127-155.

Vickrey, W. (1961). “Counterspeculation, auctions, and competitive sealed tenders”, *Journal of Finance,* 16: 8-37.

Vries, S. y Vohra, R. (2003). “Combinatorial Auctions: A Survey”, *INFORMS, Journal on Computing* 15: 284-309.